Mathématiques des quasi–cristaux

Arnaud Girand

Rapport de stage, mai–juin 2010

Table des matières

Introduction

Le présent document a été élaboré durant un stage effectué par l'auteur au laboratoire de mathématiques de Chevaleret (Paris XIII), du 17 mai au 1er juillet 2010, sous la direction de M. Paul Gérardin et sous tutelle de l'École Normale Supérieure de Cachan et de l'université Paris VII.

Motivation

Annoncée en novembre 1984 dans [SBGC84], la découverte par Shechtman, Blech, Gratias et Cahn d'une phase métallique ordonnée et non périodique (i.e ne présentant pas d'invariance par translation non nulle) a mis à mal l'un des dogmes de la physique du solide, qui voulait que l'équilibre thermodynamique d'un solide soit atteint dans une structure cristalline, i.e ordonnée et périodique.

À l'heure actuelle, on définit la notion physique de structure ordonnée par le biais de la diffraction. En faisant diffracter un rayon à travers le matériau étudié, on obtient des taches d'autant plus fines que les atomes du dit matériaux interfèrent de façon systématique, alors que ces taches perdront en finesse si ils se brouillent mutuellement. Étant donné que les structures périodiques donnent lieu à des taches de diffraction fines et que l'on n'avait jusqu'ici rencontré aucune structure ordonnée qui ne soit pas périodique, il était considéré comme acquis par les physiciens que toute structure ordonéee devait être périodique.

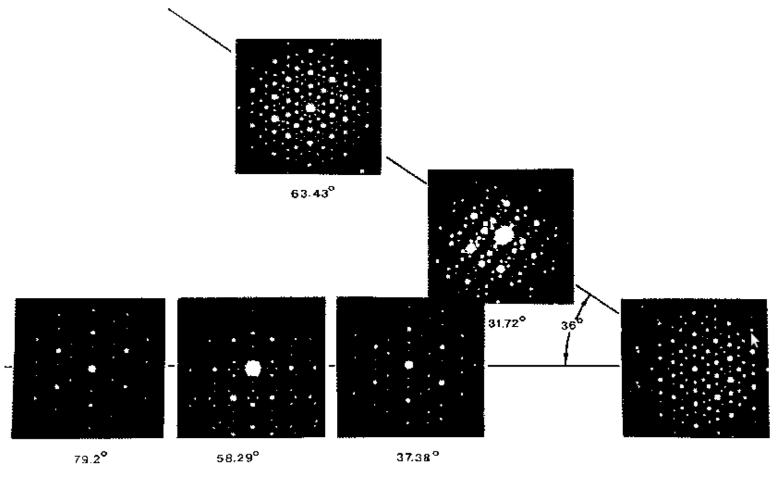

FIG. 1 – Figures de diffraction obtenue par D. Shechtman en 1984 à partir d'un alliage aluminium–manganèse.

Or, la figure de diffraction obtenue par Shechtman en 1984 à l'aide d'un alliage d'aluminium et de manganèse par une technique de refroidissement rapide, présentait la symétrie de l'icosaèdre, et en particulier celle par rotation d'ordre 5, incompatible avec les invariances par translation caractérisant une structure périodique. Non seulement cette surprenante découverte ne s'avéra pas être due à une quelconque erreur d'observation, mais de tels "quasi–cristaux" furent aisément reproduits en laboratoire. Récemment (2009), une telle structure d'origine naturelle a été mise à jour dans les montagnes de Koryak (Russie).

Il est intéressant de noter que bien que le terme de quasi–cristal soit toujours utilisé pour les désigner, la définition de structure cristalline a depuis été modifiée pour inclure ces structures ordonnées et non périodiques.

La modélisation mathématique des quasi–cristaux n'a donnée lieu à l'heure actuelle à aucun consensus et différentes définitions cohabitent sans qu'aucune ne soit considérée par tous comme adaptée. Nous nous intéresserons dans cet exposé à deux d'entre elles. La première, introduite par Lagarias, consiste à voir un quasi–cristal comme un ensemble de Delone de type fini, alors que la seconde, que l'on doit à Meyer, se base sur une propriété de stabilité algèbrique. C'est cette dernière classe d'ensembles, aussi appelés ensembles de Meyer, que nous désignerons par "quasi–cristaux" tout au long du présent document, bien qu'elle puisse être considérée comme trop restrictive (cf. notamment [Lag99]).

Dans cet exposé, nous nous intéresserons successivement à différents aspects de la modélisation mathématique des quasi–cristaux. Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur la notion d'ensemble de Delone et sur quelques propriétés et exemples intéressants de tels ensembles. Dans un second moment, nous donnerons une explication mathématique de l'étonnant phénomène observé par Shechtman en étudiant les figures de diffraction générées par différents types de figures cristallines.

La troisième partie de ce document est presque totalement indépendante des deux autres car elle illustre une autre approche de la notion de quasi–cristal, via l'analyse harmonique. Nous nous intéresserons en premier lieu aux fonctions presque périodiques et à leurs coefficients de Fourier, avant d'évoquer brièvement les liens qui existent entre ces fonctions et les structures quasi–cristalline, via l'ε–dualité. Enfin, le lecteur trouvera en annexe quelques rappels sur les notions d'analyse nécessaires aux chapitres concernant la diffraction et les fonctions presque périodiques.

Notations

Dans toute la suite, on utilisera les notations suivantes :

- ◇ Pour un ensemble X, on notera $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.
- ◇ Pour un ensemble X, on notera $[X]$ le groupe abélien libre formé des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de X. Si $[X]$ possède un nombre fini s de générateurs $x_1, \dots, x_s$, on notera $[X] = \langle x_1, \dots, x_s \rangle_{\mathbb{Z}}$, voire $\langle x_1, \dots, x_s \rangle$ si il n'y a aucune ambiguité possible.
- ◇ Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de son produit scalaire canonique $\langle . , . \rangle$, de la norme euclidienne $\|.\| : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et de la distance associée $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$. On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^d$ et $A \subset \mathbb{R}^d$, on pose :
$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$
- ◇ Si $x_1 \dots x_p$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on notera $\langle x_1, \dots, x_p \rangle_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\langle x_1, \dots, x_p \rangle_{\mathbb{R}}$) l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ (resp. sur $\mathbb{R}$) par les x_i. On notera parfois l'un ou l'autre $\langle x_1, \dots, x_p \rangle$ si il n'y a aucune ambiguité possible.
- ◇ Si $A \subset \mathbb{R}^d$, on appelle diamètre de A la quantité :
$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$
- ◇ On désignera par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble de boréliens de $\mathbb{R}^d$, i.e la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$ pour sa topologie d'espace vectoriel normé.

Chapitre 1

Ensembles de Delone, quasi–cristaux

1.1 Définitions liminaires

1.1.1 Ensembles de Delone, ensembles localements finis

Commençons par introduire une classe d'ensembles fondamentaux dans l'étude du sujet qui nous intéresse : les ensembles de Delone[1]. Ces ensembles formalisent la notion intuitive de systèmes de points "occupant bien l'espace", i.e présents partout mais pas trop proches les uns des autres.

Définition 1.1 (Ensemble de Delone)
Une partie Λ de $\mathbb{R}^d$ est appelée ensemble de Delone si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Λ *est un ensemble uniformément discret, i.e :*

$$\exists r > 0,\, \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda,\ \|\lambda - \lambda'\| \geq r \tag{1.1}$$

(ii) Λ *est un ensemble relativement dense, i.e :*

$$\exists R > 0,\, \forall a \in \mathbb{R}^d,\ \Lambda \cap \mathcal{B}(a, R) \neq \emptyset \tag{1.2}$$

Par commodité, on parlera de (r, R)–Delone, où r (resp. R) vérifie la propriété (1.1) (resp. (1.2)).

Exemples :

1. On pose :
$$\Lambda = \left\{ n + \frac{1}{|n|} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$
Alors Λ est un ensemble de Delone. En effet :
   (i) Soient $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $p \geq 1$ tel que $p \neq -n$. Alors :
$$\left| (n+p) + \frac{1}{|n+p|} - (n + \frac{1}{|n|}) \right| = \left| p + \frac{1}{|n+p|} - \frac{1}{|n|} \right| \geq |p| \geq 1$$
   (ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| > 1$, alors la boule $\overline{\mathcal{B}}(x, 2)$ contient le point $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{|\lfloor x \rfloor|} \in \Lambda$. Sinon, elle contient le point $2 = 1 + \dfrac{1}{1}$ si $x \geq 0$ ou -2 si $x < 0$.

   Ainsi, Λ est un $(1, 2)$–Delone dans $\mathbb{R}$.
2. *Pavage Pinvwheel.* Commençons par considérer le triangle $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(2, 1)$ (figure 1.1).
À partir de 5 copies isométriques du triangle $\mathcal{T}$ on construit un nouveau triangle de mêmes proportions, comme illustré sur la figure 1.2.
On peut ainsi définir un pavage du plan, appelé pavage *Pinwheel*, en itérant ce procédé[2]. De fait, l'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles de ce pavage forme un ensemble de Delone.

[1] On lit parfois "Delaunay", plus éloigné du cyrillique *Делоне́*
[2] Une construction détaillée de ce pavage peut être trouvée dans [Rad94]

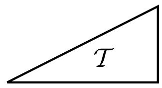

FIG. 1.1 – Triangle initial du pavage *pinwheel*.

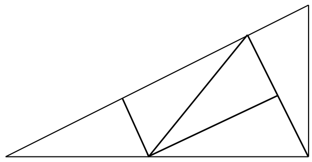

FIG. 1.2 – Première itération du procédé *pinwheel* (cf. [Rad94]).

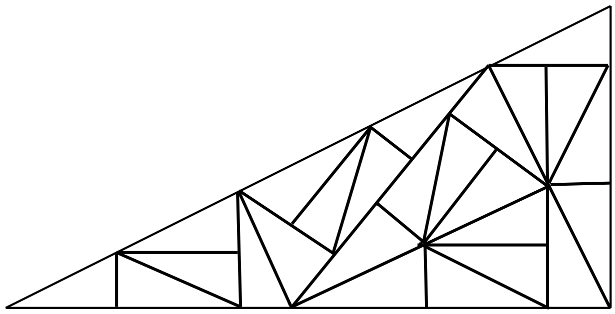

FIG. 1.3 – Deuxième itération du procédé *pinwheel*.

Radin démontre dans [Rad94] que ce pavage possède un nombre infini (modulo translation) de triangles.

Nous allons à présent énoncer une propriété élémentaire mais fondamentale des ensembles de Delone, dont il sera maintes fois fait usage dans la suite de cet exposé.

Définition 1.2 (Ensemble localement fini)
Un ensemble est dit localement fini si son intersection avec toute boule fermée est finie.

Proposition 1.1
Un ensemble uniformément discret est localement fini.

DÉMONSTRATION : Cette propriété découle de la propriété (1.1) des ensembles de Delone.

Remarque : La réciproque de la proposition 1.1 est fausse. En effet, considérons l'ensemble suivant :

$$X := \{2n \,|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \left\{2n + \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$$

L'ensemble X est composé de paires de points arbitrairement proches espacées d'au moins $\frac{3}{2}$, ce qui en fait un ensemble localement fini n'étant pas uniformément discret.

Une première conséquence de la proposition 1.1 est la suivante :

Proposition 1.2
Un ensemble de Delone est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : Soit Λ un ensemble de Delone. $\mathbb{R}^d$ peut être recouvert d'un nombre dénombrable de translatés du cube unité fermé I (i.e la boule unité fermée pour $\|.\|_\infty$). En effet, si on note I_z le cube de côté 1 centré en $z \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{z \in \mathbb{N}^d} I_z$$

Or, chacune des intersections $\Lambda \cap I_z$ étant finie car Λ est localement fini, on obtient le résultat par dénombrabilité de $\mathbb{N}^d$.

1.1.2 Réseaux

Une famille classique d'ensembles de Delone est celle des réseaux, qui permettent, entre autres, de modéliser des structures cristallines, comme nous le verrons un peu plus loin.

Définition 1.3 (Réseau)
Un réseau $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^d$ est un $\mathbb{Z}$–module engendré par d vecteurs linéairement indépendants.

Remarquons qu'un tel ensemble est nécessairement un sous–groupe additif dénombrable de $\mathbb{R}^d$ et que l'espace vectoriel $\langle\mathcal{R}\rangle$ est égal à $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Proposition 1.3
Un réseau est un ensemble de Delone.

Démonstration : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ un système libre et générateur (nous dirons désormais "base") d'un réseau $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ est alors uniformément discret, avec la constante $r = \min_{i\neq j}\|e_i - e_j\|$, et relativement dense, avec la constante $R = \max\|e_i\|$.

À tout réseau on peut associer un autre réseau, appelé *réseau dual*, correspondant (comme nous le verrons) à sa figure de diffraction.

Proposition 1.4 (Réseau dual)
Soit $\mathcal{R}$ un réseau. Alors, l'ensemble $\mathcal{R}^* = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, \forall\lambda \in \Lambda,\, e^{2i\pi\langle y,\lambda\rangle} = 1\}$ est un réseau, appelé réseau dual de $\mathcal{R}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $y \in \mathcal{R}^* \Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda,\, \langle y, \lambda\rangle \in \mathbb{Z}$. Or, si $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ est une base de $\mathcal{R}$, il nous suffit de vérifier cette condition sur cette base puis de l'étendre par linéarité. On en déduit que $\mathcal{R}^*$ est le réseau engendré par les vecteurs $f_i = \frac{\prod_{j\neq i} a_j}{\prod_j a_j}$.

1.1.3 Ensembles de Delone de type fini, quasi–cristaux

Introduisons à présent une classe importante d'ensembles de Delone, considérée par Lagarias (cf. [Lag99]) comme la plus adaptée pour modéliser une structure quasi–cristalline.

Définition 1.4 (Ensemble de Delone de type fini)
Un ensemble de Delone Λ est dit de type fini si $\Lambda - \Lambda$ est un ensemble localement fini.

Exemples :

1. L'ensemble de Delone $\Lambda = \left\{n + \frac{1}{|n|} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ n'est pas de type fini. En effet, on a :
$$\Lambda - \Lambda = \left\{p + \frac{1}{|n+p|} - \frac{1}{|n|} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\, p \geq 1\right\}$$
Ainsi, si on fixe $p \geq 1$ l'intersection de la boule $\overline{\mathcal{B}}(p, 1)$ avec $\Lambda - \Lambda$ est l'ensemble (de cardinal infini) suivant :
$$\left\{p + \frac{1}{|n+p|} - \frac{1}{|n|} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$$
2. L'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles du pavage *pinwheel* ne forme pas un ensemble de Delone de type fini, comme nous le verrons un peu plus loin.

La définition suivante est due à Meyer[3], qui l'a introduite sous cette forme dans [Mey95]. Notons que comme le montre Lagarias dans [Lag99], ni cette classe d'ensemble, ni celle des ensembles de Delone de type fini ne correspond parfaitement aux quasi–cristaux "physiques", définis à partir de leur figure de diffraction.

Définition 1.5 (Quasi–cristal)
Un ensemble de Delone Λ est appelé quasi–cristal (au sens de Meyer) si il existe un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.

[3]Ce que nous appelons ici quasi–cristal est d'ailleurs appelé "ensemble de Meyer" par de nombreux auteurs, tels que Lagarias et Moody.

Proposition 1.5
Un quasi–cristal est un ensemble de Delone de type fini.

DÉMONSTRATION : Soit Λ un quasi–cristal. Il existe alors un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$. Comme Λ est localement fini, l'ensemble $\Lambda + F$ l'est également, d'où le résultat.

Exemples :

1. L'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles du pavage *pinwheel* ne forme pas un quasi–cristal car il ne s'agit pas d'un ensemble de Delone de type fini.
2. Un réseau $\mathcal{R}$ est un quasi–cristal, car $\mathcal{R} - \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

1.2 Caractérisation des ensembles de Delone de type fini

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à une caractérisation (due à Lagarias) des ensembles de Delone de type fini à partir d'une de leurs propriétés géométriques. En effet, les ensembles de Delone de type fini sont la plus grande classe de (r, R)–Delone qui ne possèdent qu'un nombre fini, modulo translation, d'intersections avec les boules fermées de rayon $2R$ centrées en les points de l'ensemble.

1.2.1 Énumération d'un ensemble de Delone

Lemme 1.1
Tout ensemble de Delone inclus dans un ensemble de Delone de type fini est de type fini.

DÉMONSTRATION : Soit X un ensemble de Delone de type fini et soit $Y \subset X$ un ensemble de Delone. Comme $Y - Y \subset X - X$, on a que, pour $a \in \mathbb{R}^d$, $(Y - Y) \cap \overline{\mathcal{B}}(a, R) \subset (X - X) \cap \overline{\mathcal{B}}(a, R)$ et donc $\operatorname{card}\big((Y - Y) \cap \overline{\mathcal{B}}(a, R)\big) \leq \operatorname{card}\big((X - X) \cap \overline{\mathcal{B}}(a, R)\big) < \infty$ d'où le résultat.

Définition 1.6 (Énumération d'un ensemble de Delone)
Soit Λ un ensemble de Delone. On appelle énumération de Λ la fonction $\mathcal{D}_\Lambda : \mathbb{R}_+^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$\forall T > 0,\ \mathcal{D}_\Lambda(T) = \operatorname{card}\{y \in \Lambda - \Lambda \,|\, \|y\| \leq T\} = \operatorname{card}\big((\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0, T)\big)$$

Exemple : Reprenons l'ensemble de Delone $\Lambda = \left\{ n + \dfrac{1}{|n|} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$. Pour $T > 0$ la boule $\overline{\mathcal{B}}(0, T)$, une fois intersectée avec Λ, ne contient plus que les $n + \dfrac{1}{|n|}$, avec $-\lfloor T \rfloor \leq n < \lfloor T \rfloor$. Ainsi, pour tout $T > 0$, on a :

$$\mathcal{D}_\Lambda(T) = 2\lfloor T \rfloor$$

En règle générale cependant, l'énumération d'un ensemble de Delone peut rarement être calculée explicitement. Nous verrons cependant (théorème 1.8) qu'il nous suffit pour un (r, R)–Delone de savoir évaluer cette fonction au point $2R$.

1.2.2 Théorème de caractérisation des ensembles de Delone de type fini

Commençons par énoncer un résultat préliminaire, dont on pourra trouver une démonstration dans [HL58], page 182.

Proposition 1.6 (Puissance par rapport à un cercle)
Lorsqu'une sécante issue d'un point $M \in \mathbb{R}^2$ coupe un cercle $\mathcal{C}$ en les points A et B, le produit des distances MA et MB est indépendant du choix des points A et B. On appelle puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ ce nombre réel :

$$\mathcal{P}_\mathcal{C}(M) := MA \times MB$$

En particulier, si T est un point de $\mathcal{C}$ tel que la tangente $\mathcal{C}$ en T passe par M alors :

$$\mathcal{P}_\mathcal{C}(M) = MT^2 \tag{1.3}$$

Lemme 1.2
Soit Λ un (r, R)–Delone.
Soient $x, y \in \Lambda$.
Alors il existe une chaîne de points $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ de Λ telle que :
(i) pour $1 \leq i \leq m, \quad \|x_i - x_{i-1}\| \leq 2R$;
(ii) $m \leq \dfrac{4R}{r^2}\|x - y\|$

DÉMONSTRATION : Procédons récursivement :
- on pose $x_0 = x$;
- on suppose construits $x_0 \dots x_i$. Si $\|x_i - y\| \leq 2R$, on pose $m = i+1$ et $x_m = y$. Sinon, on pose :
$$B_i = \overline{\mathcal{B}}\left(x_i + R\frac{y - x_i}{\|y - x_i\|}, R\right)$$
Alors $x_i \in \partial B_i$ et il s'agit, par construction, du point de B_i le plus éloigné de y.
Montrons à présent que B_i contient un autre point de Λ que x_i. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :
$$B_i(\varepsilon) = \overline{\mathcal{B}}\left(x_i + (R+\varepsilon)\frac{y - x_i}{\|y - x_i\|}, R\right)$$
Par relative densité de Λ, on a que $B_i(\varepsilon) \cap \Lambda \neq \emptyset$. On dispose donc d'un point $x(\varepsilon) \in B_i(\varepsilon) \cap \Lambda$. Remarquons tout d'abord que comme $x_i \notin B_i(\varepsilon)$, $x(\varepsilon) \neq x_i$. De plus, Λ est uniformément discret, donc la suite $(x(\frac{1}{n}))_n$ possède (au moins) un point d'accumulation : appelons–le x_{i+1}. Il nous reste à montrer que $x_{i+1} \in B_i$. Ceci découle du fait que comme ce point se repète une infinité de fois dans $(x(\frac{1}{n}))_n$, il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que $x_{i+1} = x(\frac{1}{n_k})$, et donc :
$$\forall k \geq 0,\ d(x_{i+1}, B_i) \leq \frac{1}{n_k}$$
Ainsi, $x_{i+1} \in \overline{B_i} = B_i$ et donc $\|x_i - x_{i+1}\| \leq 2R$.

On a donc bel et bien construit une chaîne répondant à la condition (i).

Remarquons ensuite que l'on a $\|x_i - x_{i+1}\| \geq r$ car Λ est r–uniformément discret, ce qui interdit la présence de x_{i+1} dans la boule ouverte de centre x_i et de rayon r. Notons ensuite que 3 points définissant un plan (de dimension 2) dans $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ (le cas de la dimension 1 est immédiat), on peut considérer que $d = 2$ en se plaçant dans le plan contenant x_i, x_{i+1} et y (figure 1.4).

Le pire cas concernant la distance de x_{i+1} à y est celui où il se trouve sur la frontière de $\mathcal{B}_i$, à une distance de r de x_i (point u de la figure 1.4). Appelons $\mathcal{C}$ le cercle centré en le point $a_i \in \mathcal{B}_i$ diamétralement opposé à x_i et passant par u, et désignons par z la distance entre x_i et le point d'intersection de la droite engendrée par $y - x_i$ et du cercle $\mathcal{C}$. On a alors :
$$\|x_{i+1} - y\| \leq \|u - y\| = \|x_i - y\| - \widehat{z} \leq \|x_i - y\| - z$$
Où $\widehat{z}$ est la distance entre x_i et le point d'intersection de la droite engendrée par $y - x_i$ et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre y passant par u (y est plus loin de x_i que ne l'est a_i d'où l'inégalité à droite).

Alors la puissance de x_i par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est la suivante :
$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x_i) = z \times 2\|x_i - a_i\| = z \times 4R$$
Or, d'après (1.3), si T est un point de $\mathcal{C}$ tel que la tangente à $\mathcal{C}$ en T passe par x_i, on a :
$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x_i) = \|x_i - T\|^2 \geq r^2$$
Cette inégalité trouvant sa justification dans le fait que T ne peut se trouver dans le cercle de centre x_i et de rayon r. Ainsi $z \geq \dfrac{r^2}{4R}$ et donc :
$$\|x_{i+1} - y\| \leq \|x_i - y\| - \frac{r^2}{4R}$$
Cette propriété étant vraie pour tout $0 \leq i \leq m-1$, on peut écrire :
$$\sum_{i=0}^{m-1} \|x_{i+1} - y\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|x_i - y\| - m\frac{r^2}{4R}$$

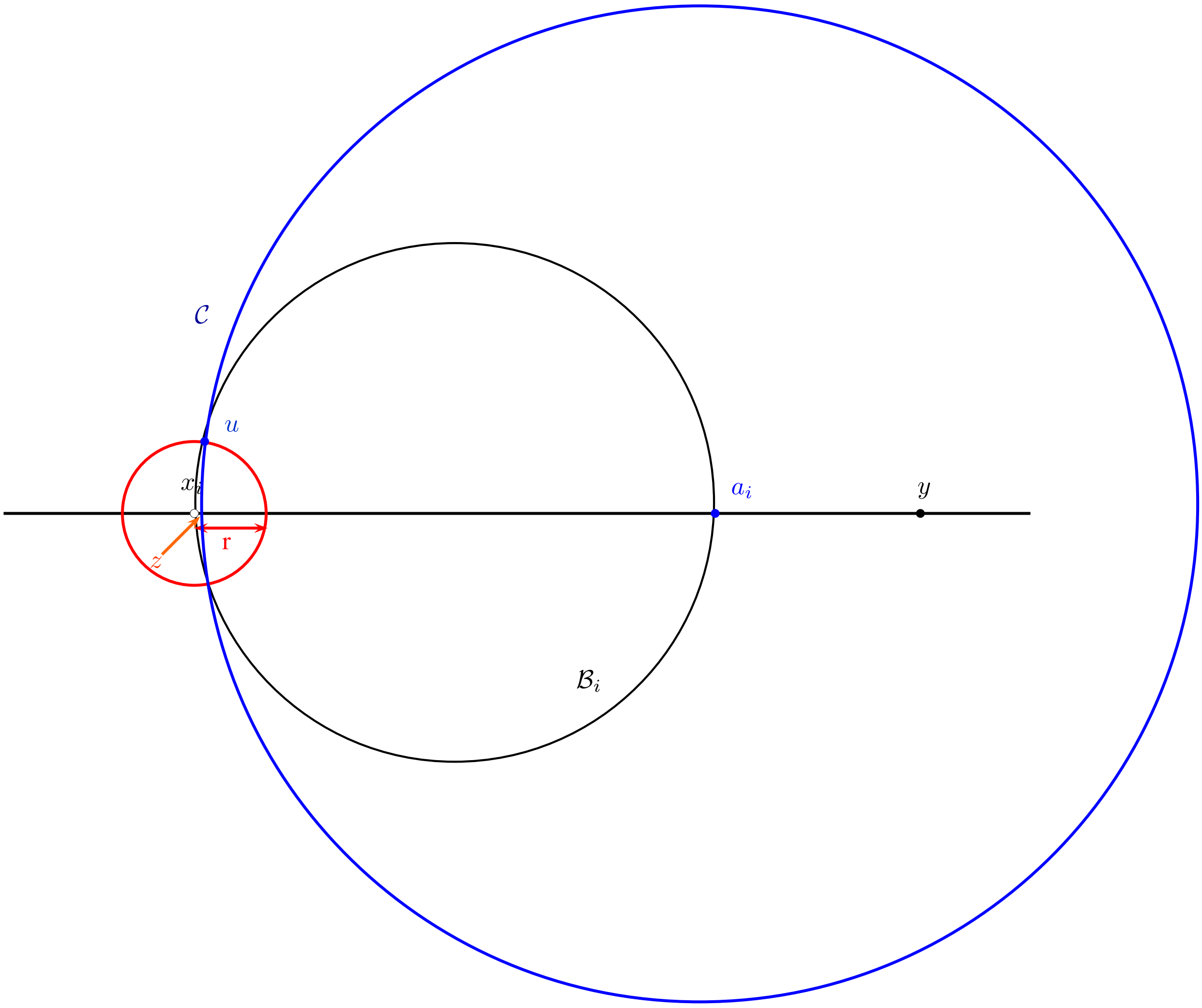

FIG. 1.4 – Représentation du plan contenant x_i, x_{i+1} et y.

i.e :

$$m\frac{r^2}{4R} \leq \|x - y\| + \|y - y\|$$

car $x_0 = x$ et $x_m = y$. D'où (ii) :

$$m \leq \frac{4R}{r^2}$$

Proposition 1.7
Soit Λ un ensemble de Delone de type fini. Alors le groupe $[\Lambda]$ possède un nombre fini de générateurs[4] majoré par $\mathcal{D}_\Lambda(2R)$.

DÉMONSTRATION : L'existence de la chaîne du lemme 1.2 implique que, si $x \in \Lambda$:

$$[\Lambda] \subset \left[\{x\} \cup \big(((\Lambda - \Lambda) \setminus \{0\}) \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 2R)\big)\right]$$

L'ensemble $\{x\} \cup \big(((\Lambda - \Lambda) \setminus \{0\}) \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 2R)\big)$ étant fini et de cardinal inférieur à $\mathcal{D}_\Lambda(2R)$, on a le résultat.

Théorème 1.8
Soit Λ un (r, R)–Delone. Alors :

$$\Lambda \textit{ est de type fini} \iff \mathcal{D}_\Lambda(2R) < \infty$$

[4]Nous dirons par la suite que "Λ possède un nombre fini de générateurs".

DÉMONSTRATION :

- Si Λ est de type fini, alors, pour tout $T > 0$, l'ensemble $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)$ est fini, et donc $\mathcal{D}_\Lambda(T) < \infty$. En particulier, $\mathcal{D}_\Lambda(2R) < \infty$.
- Supposons que $\mathcal{D}_\Lambda(2R) < \infty$. Démontrons que Λ est de type fini, i.e que $\forall T > 0$, $\operatorname{card}\big((\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)\big) < \infty$.
  Soit $T > 0$. Soient $x, y \in \Lambda$ tels que $\|x-y\| \leq T$, et soit $(x_0, \ldots, x_m)$ une chaîne associée à ces deux points par le lemme 1.2. D'après le (ii) du lemme 1.2, cette chaîne possède au plus $\frac{4R}{r^2}T$ étapes, avec d'après le (i) au plus $\mathcal{D}_\Lambda(2R)$ possibilités pour chaque distance $\|x_i - x_{i-1}\|$, ce qui au final ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour les x_i. Donc l'ensemble $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)$ est fini. D'où le résultat.

1.2.3 T–voisinages, T–atlas

Définition 1.7 (T–voisinages, T–pièces centrées)
Soit $T > 0$ et soit Λ un ensemble de Delone.
Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on appelle :

- *T–voisinage de x selon Λ l'ensemble :*

$$\mathcal{P}_\Lambda(x,T) = \Lambda \cap \overline{\mathcal{B}}(x,T)$$

- *T–pièce centrée de x (selon Λ) le translaté à l'origine du T–voisinage de x, i.e l'ensemble :*

$$P_x(\Lambda,T) = \mathcal{P}_\Lambda(x,T) - x$$

Définition 1.8 (T–atlas)
Soit $T > 0$ et soit Λ un ensemble de Delone. On appelle T–atlas (selon Λ) l'ensemble des T–pièces centrées de chacun des points de Λ, i.e :

$$\mathcal{A}_\Lambda(T) = \{P_x(\Lambda,T) \,|\, x \in \Lambda\}$$

Définition 1.9 (Fonction de comptage des atlas)
Soit Λ un ensemble de Delone. On appelle fonction de comptage des atlas la fonction $\mathcal{N}^*_\Lambda$ définie pour $T > 0$ par $\mathcal{N}^*_\Lambda(T) = \operatorname{card} \mathcal{A}_\Lambda(T)$.

Corollaire 1.8.1
Soit Λ un (r,R)–Delone. Alors :

$$\Lambda \text{ est de type fini} \iff \mathcal{N}^*_\Lambda(2R) < \infty$$

DÉMONSTRATION : Ceci découle du théorème 1.8 : en effet, si Λ n'a qu'un nombre fini de $2R$–pièces, alors $\mathcal{D}_\Lambda(2R)$ est fini ; et si $\mathcal{D}_\Lambda(2R)$ est fini, alors il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les point de Λ situés à une distance inférieure à $2R$ d'un point donné.

1.3 Liens avec les pavages de $\mathbb{R}^d$

Intéressons-nous à présent aux *pavages* de l'espace $\mathbb{R}^d$ et à leurs liens avec les ensembles de Delone. Tout d'abord, rappelons la définition d'un pavage de $\mathbb{R}^d$:

Définition 1.10 (Pavage de $\mathbb{R}^d$)
On appelle pavage de $\mathbb{R}^d$ toute famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ de parties de $\mathbb{R}^d$ telle que :

(i) pour tous $T, T' \in \mathcal{T}$, on a :

$$\mathring{T} \cap \mathring{T'} = \emptyset$$

(ii)

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

1.3.1 Cellules de Voronoï

Abordons à présent le sujet des cellules de Voronoï, qui nous permettront de caractériser en terme de pavages les ensembles de Delone de type fini.

Définition 1.11 (Cellule de Voronoï)
Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de Delone, et soit $x \in \Lambda$. La cellule de Voronoï de x (selon Λ) est l'ensemble des points plus proches de x que de tout autre point de Λ, i.e l'ensemble :

$$V_\Lambda(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, \forall z \in \Lambda,\, \|y - x\| \leq \|y - z\|\}$$

Construction d'une cellule de Voronoï : Pour tracer la cellule de Voronoï d'un point x appartenant à un ensemble de Delone Λ, commençons par le relier à chacun des points de son "étoile (infinie)"[5], c'est à dire de la limite quand $r \to \infty$ des ensembles (finis) $\overline{B}(x, r) \cap \Lambda$ (figure 1.5). Puis traçons les hyperplans bissecteurs à chacune des droites ainsi générées (figure 1.6) . La cellule de Voronoï est alors le plus petit convexe dont la frontière est formée par ces hyperplans (figure 1.7) .

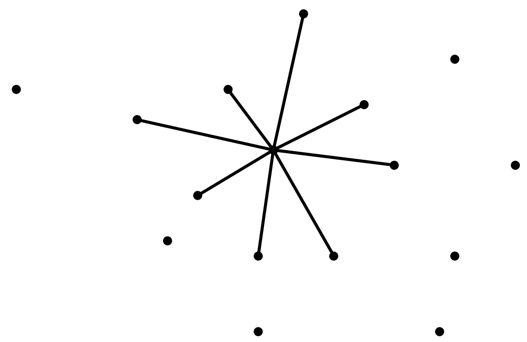

FIG. 1.5 – Construction d'une cellule de Voronoï, étape 1/3 (ne sont représentés que les traits de construction non superflus en vue de l'étape 2).

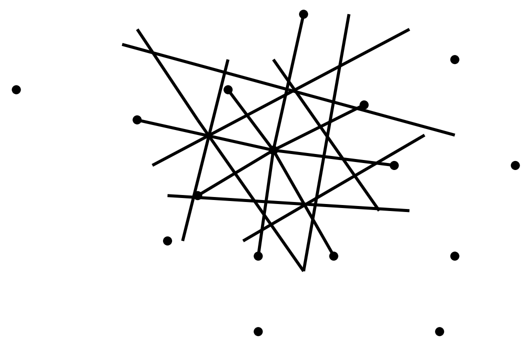

FIG. 1.6 – Construction d'une cellule de Voronoï, étape 2/3.

La proposition suivante nous livrera, en conjonction avec la proposition 1.10, une caractérisation géométrique intéressante des ensembles de Delone de type fini.

Proposition 1.9
L'ensemble des cellules de Voronoï d'un (r, R)–Delone Λ forme un pavage de $\mathbb{R}^d$, appelé pavage de Voronoï induit par Λ.

DÉMONSTRATION :
- Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par relative densité de Λ, il existe un point $y \in \Lambda$ tel que $\|y - x\| \leq R$. Posons $V = \overline{B}(x, R) \cap \Lambda$. Alors V est un ensemble fini car Λ est localement fini, donc il existe un point y_0 tel que $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| \,|\, y \in V\}$. Par définition, on a alors que x appartient à la cellule de Voronoï $V_\Lambda(y_0)$.

[5]Terminologie employée par Senechal dans [Sen95].

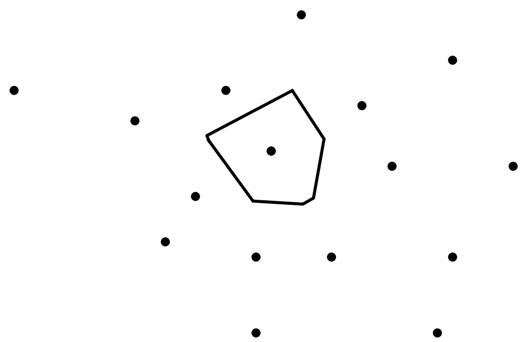

FIG. 1.7 – Construction d'une cellule de Voronoï, étape 3/3.

– Soient $x, y \in \Lambda$. Montrons que l'ensemble $V_\Lambda(x) \cap V_\Lambda(y)$ est d'intérieur vide. On a que :

$$\overset{\circ}{\overbrace{V_\Lambda(x)}} = \{z \in \mathbb{R}^d \,|\, \forall t \in \Lambda,\ \|z - x\| < \|z - t\|\}$$

En particulier, si $z \in \overset{\circ}{\overbrace{V_\Lambda(x)}}$, $\|z - x\| < \|z - y\|$ et donc $z \notin V_\Lambda(y)$. On a une propriété symétrique en interchangeant les rôles de x et y. On conclut en utilisant le fait que $\overset{\circ}{\overbrace{V_\Lambda(x) \cap V_\Lambda(y)}} = \overset{\circ}{\overbrace{V_\Lambda(x)}} \cap \overset{\circ}{\overbrace{V_\Lambda(y)}}$.

Exemple : Dans le cas du pavage *pinwheel* vu précedemment, les cellules de Voronoï de l'ensemble de Delone formé par les centres des cercles circonscrits aux triangles élémentaires sont ces mêmes triangles. Or, il existe une infinité de tels triangles modulo translation (cf. [Rad94]) et donc le pavage de Voronoï associé à cet ensemble possède un nombre infini de cellules de Voronoï n'étant pas équivalentes par translation. Ainsi, une conséquence de la proposition 1.10, que nous allons démontrer au paragraphe suivant, est que cet ensemble de Delone n'est pas de type fini.

1.3.2 Une caractérisation en termes de pavages des ensembles de Delone de type fini

Définition 1.12 (Ensemble de Delone d'atlas localement fini par translation)
On dit qu'un ensemble de Delone Λ est d'atlas localement fini par translation si $\forall T > 0, \mathcal{N}^*_\Lambda(T) < \infty$.

Définition 1.13 (Application coordonnée)
Soit Λ un ensemble de Delone possèdant un nombre fini de générateurs, soient $v_1, \dots v_s \in \mathbb{R}^d$. On appelle application coordonnée associée à ce système de générateurs la fonction $\phi : [\Lambda] \to \mathbb{Z}^s$ définie, pour $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s$, par :

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{s} x_i v_i\right) = (x_1, \dots, x_s)$$

Proposition 1.10
Soit Λ un (r, R)–Delone de $\mathbb{R}^d$. On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) *Λ est de type fini ;*

(ii) *Λ est d'atlas localement fini par translation ;*

(iii) *le pavage de Voronoï induit par Λ a un nombre fini de cellules de Voronoï n'étant pas équivalentes par translation ;*

(iv) *Λ possède un nombre fini de générateurs et toute application coordonnée $\phi : [\Lambda] \to \mathbb{Z}^s$ vérifie :*

$$\exists C_0 > 0,\ \forall x, y \in \Lambda,\ \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq C_0 \|x - y\|$$

DÉMONSTRATION :

$(i) \Rightarrow (ii)$: L'ensemble $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)$ est fini, et si $x \in \Lambda$ et $T > 0$, on a que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\Lambda(x,T) &= \Lambda \cap \overline{\mathcal{B}}(x,T) \\
&= \{y \in \Lambda \,|\, \|y-x\| \leq T\} \\
&= \{y \in \Lambda - x \,|\, \|y\| \leq T\} \\
&= (\Lambda - x) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T) \subset (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,T)$ est un ensemble fini, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour ses sous–ensembles $\mathcal{P}_\Lambda(x,T)$. Ainsi, Λ est d'atlas localement fini par translation.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Une cellule de Voronoï $V_\Lambda(x)$ est totalement déterminée, à translation près, par l'ensemble $\mathcal{P}_\Lambda(x,2R)$. En effet, pour tout point $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y-x\| > 2R$, il existe, par relative densité de Λ un point $x' \in \Lambda$ tel que $\|x'-y\| \leq 2R$ et donc $y \notin V_\Lambda(x)$. Or, Λ est par hypothèse d'atlas localement fini par translation, donc il existe au plus $\mathcal{N}^*_\Lambda(2R) < \infty$ tels ensembles $\mathcal{P}_\Lambda(x,2R)$ distincts, modulo translation. Ainsi, il existe au plus $\mathcal{N}^*_\Lambda(2R)$ cellules de Voronoï différentes, modulo translation.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Soit $x \in \Lambda$. Comme Λ est uniformément discret, la boule $\overline{\mathcal{B}}(x, \frac{r}{2})$ est incluse dans la cellule de Voronoï $V_\Lambda(x)$. Or, les faces de chaque cellule de Voronoï déterminent totalement le marquage de (i.e la point associé à) leurs voisines : il suffit de tracer la perpendiculaire à l'hyperplan contenant la dite face passant par x et de la prolonger de la même longueur à l'opposé de x depuis la face précitée pour obtenir le marquage de la cellule voisine correspondante.

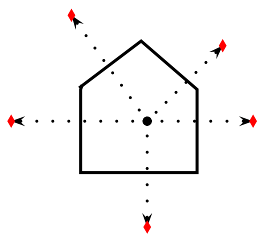

FIG. 1.8 – Détermination du marquage des voisines d'une cellule de Voronoï.

Or, par hypothèse, il n'y a (modulo translation) qu'un nombre fini de choix pour chaque cellule voisine. Itérons ce procédé de construction jusqu'à remplir de cellules de Voronoï la boule $\overline{\mathcal{B}}(x,2R)$. Pour ce faire, on aura au plus à construire $\dfrac{2R}{r}$ couches concentriques de telles cellules autour du point x.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de positions possibles pour $y \in \Lambda$ vérifiant $\|y-x\| \leq 2R$, i.e l'ensemble $(\Lambda - x) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,2R)$ est fini. Cette construction étant invariante par translation, l'ensemble $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,2R)$ est fini, d'où le résultat par théorème 1.8.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Remarquons que l'on peut définir une application coordonnée sur Λ car un Delone de type fini possède un nombre fini de générateurs. Soit donc ϕ une telle fonction et soit :

$$C_2 = \max\{\|\phi(y)\| \,|\, y \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0,2R)\}$$

Soient $x, x' \in \Lambda$. Par lemme 1.2, il existe une chaine $x_0 = x, x_1, \ldots, x_m = x'$ reliant ces deux points vérifiant que $\|x_{i+1} - x_i\| \leq 2R$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et $m \leq \frac{4R}{r^2}\|x - x'\|$. Par $\mathbb{Z}$–linéarité de ϕ, on a que :

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - \phi(x')\| &\leq \sum_{i=1}^{m} \|\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \|\phi(x_{i+1} - x_i)\| \\
&\leq C_2 m \leq C_2 \frac{4R}{r^2} \|x - x'\|
\end{aligned}$$

D'où le résultat, en posant $C_0 = \dfrac{4C_2R}{r^2}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Soient $x, x' \in \Lambda$ tels que $\|x - x'\| \leq 2R$. Alors, par hypothèse :

$$\|\phi(x - x')\| = \|\phi(x) - \phi(x')\| \leq 2C_0R$$

La fonction ϕ étant à valeurs dans $\mathbb{Z}^s$, il n'y a donc qu'un nombre fini de choix possibles pour le vecteur $\phi(x - x') \in \mathbb{Z}^s \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 2C_0R)$, et il en est de même pour le point $x - x'$ car ϕ est injective sur $[\Lambda]$. Ainsi, l'ensemble $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 2R)$ est fini et donc Λ est de type fini par théorème 1.8.

1.4 Quasi–cristaux

1.4.1 Ensembles coupé–projeté

Définition 1.14 (Ensemble coupé–projeté)
Soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On note $\pi^{||}$ (resp. $\pi^{\perp}$) les projections orthogonales sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$). On se donne un ensemble borné $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, appelé fenêtre, et on pose $S(\Omega) = \mathbb{R}^n \times \Omega \subset \mathbb{R}^d$ la bande associée à Ω.

On appelle ensemble coupé–projeté associé à la donnée $(\mathcal{R}, \Omega)$ l'ensemble :

$$X(\mathcal{R}, \Omega) = \pi^{||}(\mathcal{R} \cap S(\Omega))$$

L'entier d est appelé dimension de la donnée $(\mathcal{R}, \Omega)$.

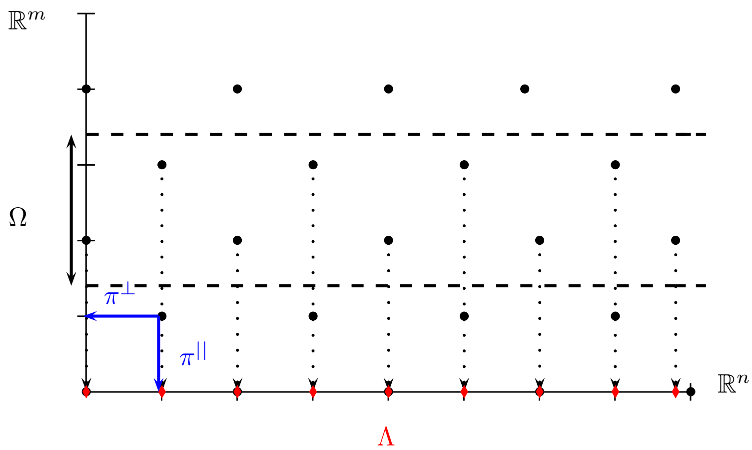

FIG. 1.9 – Construction d'un ensemble coupé–projeté.

Définition 1.15 (Ensemble coupé–projeté non–dégénéré, irréductible)
On se place dans le même cadre que celui de la définition 1.14.

(i) L'ensemble $X(\mathcal{R}, \Omega)$ est dit non–dégénéré si $\pi^{||}$ est injective sur $\mathcal{R}$, i.e si :

$$\mathcal{R} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \{(0, 0)\}$$

(ii) L'ensemble $X(\mathcal{R}, \Omega)$ est dit irréductible[6] si $\pi^{\perp}(\mathcal{R})$ est dense dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple : Chaîne de Fibonacci. Plaçons nous dans le cas $d = 2$. On munit $\mathbb{R}^2$ du réseau $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^2$, et on pose :

$$E = \{(x\phi, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

Où ϕ désigne le nombre d'or $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On désigne par I le cube unité dans $\mathbb{R}^2$ et par S la "bande délimitée par la translation de I le long de E", i.e l'ensemble des images du cube par les translations induites par les vecteurs de E.

[6] Meyer appelle ces ensembles "ensembles modèles" (cf. [Mey95] et [Ber98]).

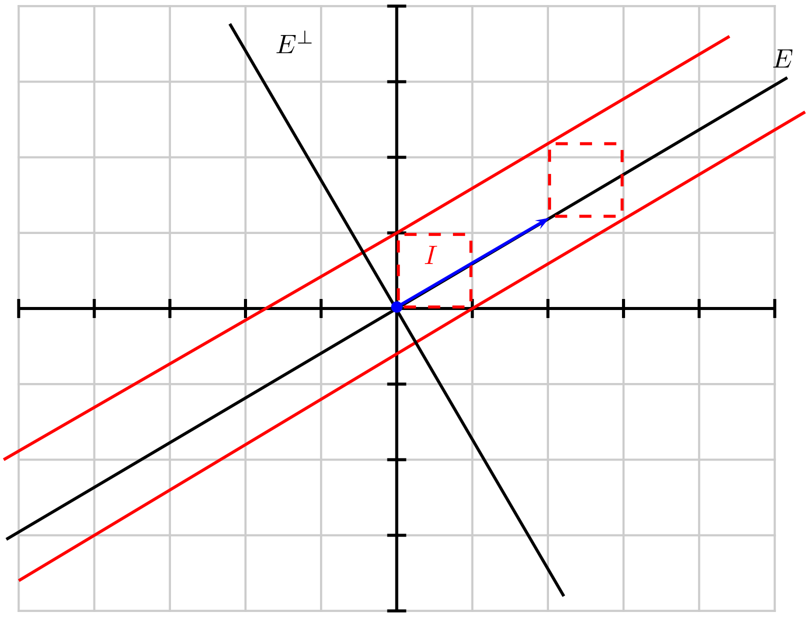

FIG. 1.10 – Construction de la bande de projection associée à la chaîne de Fibonacci.

La densité associée au réseau $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\rho : (x, y) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\delta_m(y)$$

On définit la chaîne de Fibonacci comme l'ensemble des projetés sur E d'éléments de $\mathcal{R}$, i.e le sous ensemble de E de densité :

$$\rho' := p(\rho\chi_S), \quad \text{où } p : \mathbb{R}^d \to E \text{ est la projection orthogonale sur } E.$$

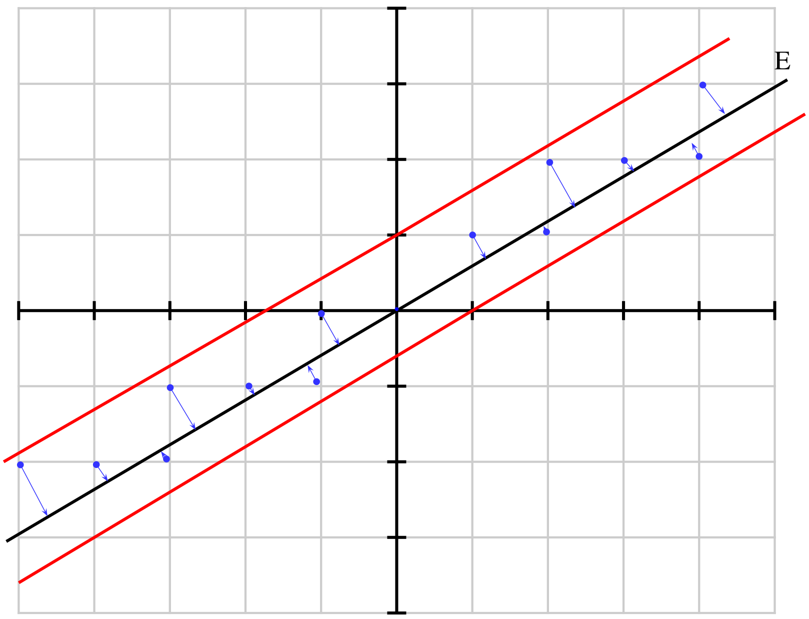

FIG. 1.11 – Construction de la chaîne de Fibonacci par la méthode coupé–projeté.

On construit donc cet ensemble selon une "variante" de la méthode coupé–projeté. Pour appliquer à la lettre celle–ci, il nous suffit de projeter le réseau $\mathbb{Z}(\phi, 1) + \mathbb{Z}(\psi, 1)$ où $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ par rapport aux espaces $E \cong \mathbb{R}^n$ et $E^\perp \cong \mathbb{R}^m$ ($n = m = 1$). Notons que comme la droite E est de pente irrationnelle, la chaîne de Fibonacci forme un ensemble coupé–projeté irréductible.

1.4.2 Caractérisation des quasi–cristaux

Nous allons à présent énoncer (et démontrer) une caractérisation, due à Meyer, Lagarias et Moody, des quasi–cristaux à l'aide des ensembles coupé–projeté ainsi que de certaines propriétés de leurs morphismes de groupes.

Définition 1.16 (Application presque linéaire)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un quasi-cristal. Une application $\psi : [X] \to \mathbb{R}^d$ est dite presque linéaire sur X si il existe une constante $C > 0$ et une application $L_\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ tel que :

$$\forall x \in X,\ \|\psi(x) - L_\psi(x)\| \leq C$$

Remarque : Cette relation n'est vérifiée que sur X et non nécessairement sur $[X]$.

Lemme 1.3 *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ une application continue telle que :*

$$\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \|F(x+y) - F(x) - F(y)\| \leq C \tag{1.4}$$

On définit l'application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ par :

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(nx)}{n}$$

Alors L est une application linéaire et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|F(x) - L(x)\| \leq C \tag{1.5}$$

Démonstration : On montre par récurrence que, pour tout entier n strictement positif et $x \in \mathbb{R}^n$ la relation (1.4) entraine que :

$$\|F(nx) - nF(x)\| \leq nC \tag{1.6}$$

Ainsi, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a que $\|F(nmx) - nF(mx)\| \leq nC$ et donc :

$$\left\| \frac{F(nmx)}{nm} - \frac{F(mx)}{m} \right\| \leq \frac{C}{m}$$

Par symétrie des rôles de n et m on obtient que :

$$\left\| \frac{F(nmx)}{nm} - \frac{F(nx)}{n} \right\| \leq \frac{C}{n}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(nx)}{n} - \frac{F(mx)}{m} \right\| &\leq \left\| \frac{F(nmx)}{nm} - \frac{F(mx)}{m} \right\| + \left\| \frac{F(nmx)}{nm} - \frac{F(nx)}{n} \right\| \\ &\leq 2\frac{C}{\min(n,m)} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{F(mx)}{m}\right)_m$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathbb{R}^d$ donc y converge. Ainsi, L est bien définie. De plus, pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n$, la relation (1.6) entraine que :

$$\left\| \frac{F(nx)}{n} - F(x) \right\| \leq C$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette relation, on obtient (1.5). De plus, d'après (1.4) :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \left\| \frac{F(n(x+y))}{n} - \frac{F(nx)}{n} - \frac{F(ny)}{n} \right\| \leq \frac{C}{n}$$

En passant à la limite en n, on obtient que L est additive par séparation de la norme euclidienne $\|.\|$. Pour finir, si $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$:

$$L\left(\frac{x}{q}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{F\left(\frac{nx}{q}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(nx)}{qn} = \frac{L(x)}{q}$$

Donc L est $\mathbb{Q}$–linéaire, donc linéaire par densité (F étant continue, si $(r_n)_n$ est une suite de rationnels convergeant vers $r \in \mathbb{R}$, on a que $F(r_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(rx)$).

Théorème 1.11
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un (r, R)–Delone. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un quasi–cristal ;

(ii) il existe un ensemble fini F tel que $X - X \subset X + F$;

(iii) X possède un nombre fini de générateurs et tout morphisme de groupes $\psi : [X] \to \mathbb{R}^d$ (pour $d \geq 1$ entier) est presque linéaire sur X ;

(iv) X possède un nombre fini de générateurs et toute application coordonnée $\phi : [X] \to \mathbb{Z}^s$ est presque linéaire au sens suivant : il existe une constante $C > 0$ et une application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ tels que :

$$\forall x \in X,\ \|\phi(x) - L(x)\| < C$$

(v) X possède un nombre fini de générateurs et il existe un ensemble coupé–projeté non–dégénéré X' de dimension $d \leq \mathrm{rg}([X])$ tel que $X \subset X'$.

Démonstration :

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que $X - X$ soit un (r', R')–Delone. Quitte à translater, on peut supposer que $0 \in X$. Posons à présent :

$$\mathcal{S} = (X - X) \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 2R)$$

Comme $X - X$ est localement fini, l'ensemble $\mathcal{S}$ est de cardinal fini. En fait, les boules $\overline{\mathcal{B}}(w, \frac{r'}{2})$ pour $w \in \mathcal{S}$ sont toutes disjointes et incluses dans $\overline{\mathcal{B}}\left(0, 3R + \frac{r'}{2}\right)$ donc :

$$\operatorname{card} \mathcal{S} \leq \left(\frac{6R}{r'} + 1\right)^n \tag{1.7}$$

Posons également :

$$V = \langle \mathcal{S} \rangle_{\mathbb{Q}} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Soit $(y'_1, \ldots, y'_s)$ une $\mathbb{Q}$–base de V[7]. Ainsi, pour tout i entier, on peut définir de façon unique une famille $(r_{i,j})_j \in \mathbb{Q}^s$ telle que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} r_{i,j} y'_j$$

Soit D le plus petit dénominateur commun des $r_{i,j}$, i.e le plus petit entier tel que l'on puisse écrire, pour tous i, j, $r_{i,j} = \dfrac{k_{i,j}}{D}$, avec $k_{i,j} \in \mathbb{Z}$. On construit alors une nouvelle base de V $(y_1, \ldots, y_s)$ en posant, pour $1 \leq i \leq s$:

$$y_i = \frac{1}{D} y'_i$$

Chaque vecteur x_i s'écrit alors :

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} k_{i,j} y_j$$

On en déduit que $\mathcal{S} \subset \langle y_1, \ldots, y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$. Posons ensuite en vue d'un usage futur :

$$C_1 = \max_{i,j} |k_{i,j}| + 1 \tag{1.8}$$

[7]Notons que s peut être très supérieur à n.

Démontrons à présent que $X - X \subset \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$. Soit $v = \tilde{w} - w \in X - X$, $w, \tilde{w} \in X$. On pose :

$$\begin{cases} z_k = w + kR\dfrac{v}{\|v\|}, \quad 0 \leq k \leq k_0 = \left\lfloor \dfrac{\|v\|}{R} \right\rfloor \\ z_{k_0+1} = \tilde{w} \end{cases}$$

Comme X est relativement dense, il existe une famille $(w_k)_{1\leq k\leq k_0}$ telle que pour tout $1 \leq k \leq k_0$ on ait $\|w_k - z_k\| \leq R$. Posons de plus $w_0 = w$ et $w_{k_0+1} = \tilde{w}$. Par inégalité triangulaire, on a alors, pour $1 \leq k \leq k_0$:

$$\|w_{k+1} - w_k\| \leq \|w_{k+1} - z_{k+1}\| + \|z_{k+1} - z_k\| + \|w_k - z_k\| \leq 3R \tag{1.9}$$

Donc $w_{k+1} - w_k \in \mathcal{S} \subset \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$, doù :

$$v = \sum_{k=0}^{k_0} (w_{k+1} - w_k) \in \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Donc $X - X \subset \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$.
Posons :

$$C_2 = 2C_1\left(\frac{4R}{r'} + 1\right)^n ; \quad F = \left\{ \sum_{j=1}^{s} \ell_j y_j \,|\, (\ell_1, \dots, \ell_s) \in \mathbb{Z}^s \cap \overline{\mathcal{B}}(0, C_2) \right\}$$

Comme $\mathbb{Z}^s$ est localement fini, F est un ensemble fini. Soit $v = \tilde{w} - w \in X - X$. Comme $v \in \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$, il existe un unique vecteur $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$ tel que :

$$v = \sum_{j=1}^{s} n_j y_j$$

Comme X est relativement dense, il existe $\tilde{w}_0 \in X$, appelé *vecteur de référence* pour v tel que $\|\tilde{w}_0\| \leq R$. Montrons que :

$$\exists f \in F,\ v = \tilde{w}_0 + f \tag{1.10}$$

Comme $0 \in X$, $X \subset X - X \subset \langle y_1 \dots y_s \rangle_{\mathbb{Z}}$ donc il existe un unique vecteur $(\tilde{n}_1^{(0)}, \dots, \tilde{n}_s^{(0)}) \in \mathbb{Z}^s$ tel que :

$$\tilde{w}_0 = \sum_{j=1}^{s} \tilde{n}_j^{(0)} y_j$$

Ainsi, (1.10) est équivalent à :

$$\forall 1 \leq j \leq s,\ |n_j - \tilde{n}_j^{(0)}| \leq C_2 \tag{1.11}$$

On pose :

$$\begin{cases} z_k = kR\dfrac{w}{\|w\|}, \quad 0 \leq k \leq k_0 = \left\lfloor \dfrac{\|w\|}{R} \right\rfloor \\ \tilde{z}_k = z_k + v, \qquad 0 \leq k \leq k_0 \end{cases}$$

Par relative densité de X, il existe deux familles $(w_k)_{1\leq k\leq k_0}$, $(\tilde{w}_k)_{1\leq k\leq k_0}$ de points de X telles que pour $1 \leq k \leq k_0$, on ait $\|w_k - z_k\| \leq R$ et $\|\tilde{w}_k - \tilde{z}_k\| \leq R$. Le vecteur $w_0 = 0$ et le vecteur de référence $\tilde{w}_0$ vérifient cette propriété pour $k = 0$ tandis qu'il suffit de poser $\tilde{w}_{k_0+1} = \tilde{w}$, $w_{k_0+1} = w$ pour qu'elle le soit pour $k = k_0 + 1$.
Posons à présent, pour $0 \leq k \leq k_0 + 1$, $v_k = \tilde{w}_k - w_k$. On a alors $v_0 = \tilde{w}_0$ et $v_{k_0+1} = v$.
Fixons $1 \leq k \leq k_0 + 1$. Comme $v_k \in X - X$, il existe un unique vecteur $(n_1^{(k)}, \dots, n_s^{(k)}) \in \mathbb{Z}^s$ tel que :

$$v_k = \sum_{j=1}^{s} n_j^{(k)} y_j$$

Montrons que $v_k - v_{k-1} \in \mathcal{S} - \mathcal{S}$. Comme $v_k - v_{k-1} = (\tilde{w}_k - \tilde{w}_{k-1}) - (w_k - w_{k-1})$, et que l'on a par inégalité triangulaire, de la même façon qu'en (1.9), que $\|\tilde{w}_k - \tilde{w}_{k-1}\| \leq 3R$ et $\|w_k - w_{k-1}\| \leq 3R$ alors $\tilde{w}_k - \tilde{w}_{k-1}, w_k - w_{k-1} \in \mathcal{S}$ donc $v_k - v_{k-1} \in \mathcal{S} - \mathcal{S}$.

Si on applique (1.8), en majorant la norme de la différence par la somme des normes, à $v_k - v_{k-1}$, on a de plus que :

$$\forall 1 \leq j \leq s,\ \|n_j^{(k)} - n_j^{(k-1)}\| \leq 2C_1 \tag{1.12}$$

Or, $v = \tilde{z}_k - z_k$ et donc, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|v_k - v\| &= \|(\tilde{w}_k - w_k) - (\tilde{z}_k - z_k)\| \\ &\leq \|\tilde{w}_k - w_k\| + \|\tilde{z}_k - z_k\| \\ &\leq 2R \end{aligned}$$

Donc $v_k \in \overline{\mathcal{B}}(v, 2R)$ et de la même façon qu'en (1.7) on montre que cette boule contient au plus $\left(\frac{4R}{r'} + 1\right)^n$ éléments de $X - X$.

Concluons par l'absurde : si on suppose que (1.11) est fausse, alors la chaîne $(v_k)_{0 \leq k \leq k_0+1}$ relie le vecteur de référence $v_0 = \tilde{w}_0$ au vecteur $v = v_{k_0+1}$, avec des étapes bornées au sens (1.12). Comme (1.11) est fausse, il existe un entier $1 \leq j_0 \leq s$ tel que :

$$\forall 1 \leq j \leq s,\ |n_{j_0}^{(k_0+1)} - \tilde{n}_{j_0}^{(0)}| > C_2$$

Or, d'après (1.12), le coefficient $n_{j_0}^{(k)}$ doit prendre, lorsque k varie de 0 à $k_0 + 1$, au moins $\left(\frac{4R}{r'} + 1\right)^n + 1$ valeurs différentes pour qu'au moins autant de points v_k soient distincts, ce qui contredit le fait que $(X - X) \cap \overline{\mathcal{B}}(v, 2R)$ possède au plus $\left(\frac{4R}{r'}\right)^n + 1$ éléments. D'où le résultat.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soit $\lambda \in X$, alors $X - \lambda \subset X - X$ donc $X - X$ est relativement dense. Pour montrer que $X - X$ est uniformément discret, démontrons que $X + F$ l'est. Notons de plus que $X + F$ est localement fini car X l'est et que F est fini.

Procédons par l'absurde : si on suppose que $X+F$ n'est pas uniformément dense, alors il existe des suites $(\lambda_k)_k, (\lambda'_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ et $(f_k)_k, (f'_k)_k \in F^{\mathbb{N}}$ telles que la suite $(x_k)_k = ((\lambda_k+f_k)-(\lambda'_k+f'_k))_k$ converge vers 0 et vérifie que $\forall k \geq 0,\ x_k \neq 0$. Or, F est fini donc il existe une extraction φ telle que la suite $(f_{\varphi(k)}, f'_{\varphi(k)})_k$ soit constante égale à $(f, f') \in F^2$. Alors, la suite $(y_k)_k$ définie par $y_k = \lambda_k - \lambda'_k$ converge vers $f - f'$ et prend une infinité de valeurs distinctes. Ainsi, l'ensemble $(X - X) \cap \overline{\mathcal{B}}(f - f', \varepsilon)$ est de cardinal infini pour $\varepsilon > 0$ ce qui contredit le fait que $X - X$ est localement fini car inclus dans $X + F$ qui l'est. D'où le résultat.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Quitte à translater, on peut supposer que $0 \in X$. Posons $\Sigma = X - X$. Il découle de l'implication $(i) \Leftarrow (ii)$ que Σ est un ensemble de Delone. En effet $\Sigma - \Sigma \subset X + F - (X + F) = \Sigma + (F - F)$ donc, comme $F - F$ est fini, Σ vérifie (ii) donc (i).

Comme $\Sigma - \Sigma$ est un ensemble de Delone, on peut trianguler $\mathbb{R}^d$ en reliant entre eux les points de $\Sigma - \Sigma$ de façon à former des $(n + 1)$–simplexes dont les sommets sont les points précités (figure 1.12) . On obtient ainsi un pavage de $\mathbb{R}^d$ à l'aide de simplexes de diamètre borné (car $\Sigma - \Sigma$ est relativement dense) par une constante $D > 0$.

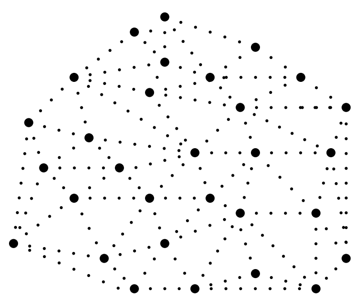

FIG. 1.12 – Triangulation associée à un ensemble de Delone.

Soit $f : [X] \to \mathbb{R}^d$ un morphisme de groupes. Comme $[X] = [\Sigma] = [\Sigma - \Sigma]$, l'application f est bien définie sur $\Sigma - \Sigma$. Si v, w sont deux sommets du même simplexe, alors $\|v - w\| \leq D$ et

$v-w$ appartient à l'ensemble de Delone $(\Sigma-\Sigma)-(\Sigma-\Sigma)$, i.e $v-w$ appartient à l'ensemble $((\Sigma-\Sigma)-(\Sigma-\Sigma))\cap\overline{\mathcal{B}}(0,D)$. Cet ensemble étant fini et indépendant du couple (v,w), on a que :

$$\|f(v)-f(w)\| = \|f(v-w)\| \text{ est borné indépendamment de } u \text{ et } v. \tag{1.13}$$

Soit $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ l'application définie par :

(a) $F_{|\Sigma-\Sigma} = f_{|\Sigma-\Sigma}$;

(b) F est une application affine sur chaque simplexe de la triangulation précédemment évoquée.

Ainsi, sur un simplexe, F est une application affine coïncidant avec le morphisme f sur les sommets.

Montrons qu'il existe une constante $C_1>0$ telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ \|F(y)-F(x)\|\leq C_1\|x-y\| \tag{1.14}$$

Cas 1 : *x et y appartiennent au même simplexe S.*
Quitte à translater, supposons que 0 est l'un des noeuds de S. Ainsi, $F_{|S}$ est une application linéaire sur S et (1.13) implique alors (1.14).

Cas 2 : *x et y appartiennent à deux simplexes différents.*
Notons $\{x_1\dots x_p\}$ l'intersection du segment $[x,y]$ avec les cotés des simplexes qu'il traverse, et posons $x_0=x$ et $x_{p+1}=y$. Alors :

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\| &= \left\|\sum_{i=0}^{p} F(x_{i+1})-F(x_i)\right\|\\ &\leq \sum_{i=0}^{p} C_1\|x_{i+1}-x_i\|\\ &= C_1\|y-x\|\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Montrons à présent qu'il existe un réel $C>0$ tel que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ \|F(x+y)-F(x)-F(y)\|\leq C \tag{1.15}$$

Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. Par relative densité de Σ, il existe un réel $K>0$ et deux points x' et y' de Σ tels que $\|x-x'\|\leq K$ et $\|y-y'\|\leq K$. Ainsi,$\|(x+y)-(x'+y')\|\leq 2K$ et :

$$\begin{aligned}\|F(x+y)-F(x)-F(y)\|\leq\ & \|F(x+y)-F(x'+y')\|\\ &+\|F(x'+y')-F(x')-F(y')\|\\ &+\|F(x)-F(x')\|+\|F(y)-F(y')\|\end{aligned}$$

Comme $x',y'\in\Sigma$, alors $x',y',x'+y'\in\Sigma-\Sigma$ et donc on peut remplacer F par f dans le terme du milieu de la colonne de droite. D'après (1.14), on obtient ainsi (1.15) avec $C=C_1(2K+K+K)$.

D'après la relation (1.15) et le lemme 1.3, on a bien l'existence d'une application linéaire L telle que $\|F(x)-L(x)\|$ soit bornée indépendamment de x et donc telle que $f-L$ soit uniformément bornée sur $\Sigma-\Sigma$ donc sur Σ. D'où le résultat.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* : Une application coordonnée pouvant être vue comme un morphisme de groupes $\phi:[X]\to\mathbb{R}^d$, cette implication est immédiate.

(iv) $\Rightarrow$ *(ii)* : Soient $x,x'\in X$. Par $\mathbb{Z}$–linéarité de ϕ et linéarité de L, on a que :

$$\|L(x-x')-\phi(x-x')\|\leq 2C$$

Comme X est relativement dense, il existe un point $x''\in X$ tel que $\|x''-(x+x')\|\leq R$. Par hypothèse, on a de plus que $\|L(x'')-\phi(x'')\|\leq C$. Or, comme L est une application linéaire en dimension finie, donc continue, il existe $K=\|L\|>0$ tel que :

$$\|L(x''-(x+x'))\|\leq K\|x''-(x+x')\|\leq KR$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\phi(x''-(x+x'))\| \leq & \|L(x'')-\phi(x'')\| \\ & + \|L(x''-(x+x'))\| \\ & + \|L(x-x')-\phi(x-x')\| \\ \leq & 3C+KR\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\phi([X]) \subset \mathbb{Z}^s$, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $\phi(x''-(x+x'))$, l'ensemble $\mathbb{Z}^s \cap \overline{\mathcal{B}}(0,3C+KR)$ étant fini. Par injectivité de ϕ, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le point $x''-(x+x')$: appelons F l'ensemble de ces possibilités. On a alors $X-X \subset X+F$ d'où (ii).

$(iv) \Rightarrow (v)$: Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et k un entier positif. Par relative densité de X, il existe un point $x_k \in X$ tel que $\|x_k - 2^k y\| \leq R$. Posons alors :

$$L(y) = \lim_{k\to\infty} \frac{\phi(x_k)}{2^k}$$

Par une démonstration similaire à celle du lemme 1.3, on montre que L est bien définie et linéaire. De plus, si on note $v_1 \dots v_s$ un sytème de générateurs du groupe $[X]$, pour tout point $x \in X$ on a l'identité :

$$x = \sum_{j=1}^{s} \phi(x)_j v_j$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s} L(y)_j v_j &= \sum_{j=1}^{s} \lim_{k\to\infty} \frac{\phi(x_k)_j}{2^k} v_j \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{s} \phi(x_k)_j v_j \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{2^k}\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \geq 0$, $\left\|\frac{x_k}{2^k} - y\right\| \leq \frac{R}{2^k}$ et donc la suite $\left(\frac{x_k}{2^k}\right)_k$ converge vers y, d'où l'identité :

$$y = \sum_{j=1}^{s} L(y)_j v_j \tag{1.16}$$

Nous allons à présent utiliser L pour construire un espace coupé–projeté non–dégénéré contenant X. Posons $m = s-n$ $(m \geq 0)$ et $V = L(\mathbb{R}^n)$. On construit l'application $\psi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ qui à un vecteur $u = (u_1 \dots u_s)$ associe :

$$\psi(u_1 \dots u_s) = \sum_{j=1}^{s} u_j v_j$$

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi \circ L(y) = \sum_{j=1}^{s} L(y)_j v_j = y$$

Donc $\psi(V) = \mathbb{R}^n$ d'où $\dim V = n$ car ψ est injective. Posons à présent $W = \ker(\psi)$. Alors $\dim W = s-n = m$. Donnons–nous une base orthonormée $(\ell^{(i)})_{1\leq i\leq m}$ de W, où $\ell^{(i)} = (\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_s})$. On pose ensuite, pour $1 \leq j \leq s$, et si $(e_j)_j$ est la base canonique de $\mathbb{R}^s$:

$$w_j = L(v_j) - e_j$$

Alors, si $1 \leq j \leq s$:

$$\begin{aligned}\psi(w_j) &= \sum_{i=1}^{s} L(v_j)_i v_i - \sum_{i=1}^{s} (e_j)_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} L(v_j)_i v_i - \sum_{i=1}^{s} \delta_{j,i} v_i \\ &= v_j - v_j = 0\end{aligned}$$

Donc $w_j \in W$, donc il existe une famille $(\alpha_{j,i})_{1\leq i\leq m}$ de réels telle que :

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{j,i}\ell^{(i)}$$

Pour $1 \leq j \leq s$, on pose :

$$v_j^* = (v_j, \alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,m})$$

On note $\mathcal{R}$ le sous–groupe additif de $\mathbb{R}^s$ engendré par les vecteurs v_j^*. Montrons que $\mathcal{R}$ est un réseau. Pour ce faire, il nous suffit de montrer que les vecteurs v_j^* sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Supposons donc qu'il existe s réels u_j tels que :

$$\sum_{j=1}^{s} u_j v_j^* = 0, \quad \text{i.e} \quad \left(\sum_{j=1}^{s} u_j v_j, \sum_{j=1}^{s} u_j \alpha_{j,1}, \ldots, \sum_{j=1}^{s} u_j \alpha_{j,m}\right) = 0$$

Alors $\sum_{j=1}^{s} u_j v_j = 0$ ce qui implique que le vecteur $u = (u_1, \ldots, u_s)$ est un élément de W, et pour tout $1 \leq i \leq s$, $\sum_{j=1}^{s} u_j \alpha_{j,i} = 0$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} u_j w_j &= \sum_{j=1}^{s} u_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{j,i}\ell^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \ell^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{s} u_j \alpha_{j,i}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or :

$$0 = \sum_{j=1}^{s} u_j w_j = \sum_{j=1}^{s} u_j L(v_j) - (u_1, \ldots, u_s) = \sum_{j=1}^{s} u_j L(v_j) - u$$

Ainsi, par linéarité de L :

$$u = L\left(\sum_{j=1}^{s} u_j v_j\right) = L(0) = 0$$

Donc $\mathcal{R}$ est bien un réseau de $\mathbb{R}^s$. Soit $x \in [X]$. Rappelons que $x = \sum_{j=1}^{s} \phi(x)_j v_j$ et posons :

$$x^* = \sum_{j=1}^{s} \phi(x)_j v_j^*$$

On a alors que $x^* \in \mathcal{R}$ et que $\pi^{||}(x^*) = x$. En effet, pour tout $1 \leq j \leq s$, $\pi^{||}(v_j^*) = v_j$, cette dernière égalité entrainant de plus que la projection $\pi^{||}$ est injective sur $\mathcal{R}$ car $[X] = \langle v_1, \ldots, v_s\rangle_{\mathbb{Z}}$ est un module libre.

Posons à présent :

$$(z_1, \ldots, z_n) = \pi^{\perp}(x^*) = \sum_{j=1}^{s} \phi(x)_j \underbrace{\pi^{\perp}(v_j^*)}_{=(\alpha_{j,1},\ldots,\alpha_{j,m})}$$

Les $\ell^{(i)}$ formant une base orthonormée de W, on a que :

$$\begin{aligned}
\|\pi^{\perp}(x^*)\| &= \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{m} z_i \ell^{(i)}\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j \alpha_{j,i}\right)\ell^{(i)}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{j,i}\ell^{(i)}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j w_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j (L(v_j)-e_j)\right\| \\
&= \left\|L\left(\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j v_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j e_j\right\| \\
&= \|L(x)-\phi(x)\| \quad \text{car} \quad \sum_{j=1}^{s}\phi(x)_j e_j = \phi\left(\sum_{j=1}^{s} x_j v_j\right) \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Ainsi, il nous suffit de prendre pour fenêtre l'ensemble :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| < C+1\}$$

pour obtenir un ensemble coupé–projeté non–dégénéré $X' = X(\Omega, \mathcal{R})$ tel que $X \subset X'$.

$(v) \Rightarrow (iv)$: On va construire L à partir de $X' = X(\mathcal{R}, \Omega)$. Comme X' est non–dégénéré, la projection $\pi^{||}$ est injective sur le réseau $\mathcal{R}$ donc l'application $\pi : \mathcal{R} \to X$ qui à $r \in \mathcal{R}$ associe $\pi(r) = \pi^{||}(r)$ est une bijection. Posons donc, pour $x \in X$:

$$L(x) = \pi^{-1}(x)$$

On étend ensuite L de façon linéaire à $[X]$. On a alors, par construction de X' comme ensemble coupé–projeté, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $x \in X$:

$$\|L(x) - \phi(x)\| = \|\pi^{-1}(x) - \phi(x)\| \leq C$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.11.1
Soit X un quasi–cristal. Alors tout ensemble de Delone $Y \subset X$ est un quasi–cristal.

Démonstration : D'après le point (v) du théorème 1.11 , il existe un ensemble coupé–projeté non–dégénéré X' contenant X. De fait $Y \subset X \subset X'$ d'où le résultat par ce même point (v).

1.4.3 Substitutions

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à une méthode alternative de construction des ensembles coupé–projeté, via la notion de substition, qui se révèle particulièrement adaptée au cas des chaînes de Fibonacci.

Définition 1.17 (Substitution)
On se donne un ensemble fini $\mathcal{A}$, appelé alphabet*, et deux entiers $n, q \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des suite finies indexées par $\mathbb{N}^d$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, appelées* mots*. Soit σ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$, appelée* règle de croissance.
On appelle alors substitution associée à σ l'application $S_\sigma : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ qui à une suite de $\mathcal{A}^*$ associe la suite composée des images par σ de ses termes.

Exemple : *Chaîne*[8] *de Fibonacci en dimension 1.*
Plaçons nous dans le cadre suivant[9]
- $\mathcal{A} = \{a, b\}$;
- $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$;

On obtient alors une substitution qui, si on l'itère à partir de b, nous livre une chaîne appelée *chaîne de Fibonacci*, dont on obtient le terme d'ordre $n+2$ en concaténant les termes d'ordre $n+1$ et n et dont les premiers termes sont :

$$\begin{array}{l} b \\ a \\ ab \\ aba \\ abaab \\ abaababa \\ \vdots \end{array}$$

FIG. 1.13 – Construction de la chaîne de Fibonacci par substitution.

Remarquons que si on pose $\Phi(a) = 1$ et $\Phi(b) = \phi$ alors l'image par Φ de la chaîne de Fibonacci est égale à l'ensemble coupé–projeté éponyme.

En fait, il existe même une méthode générale permettant d'obtenir des ensembles coupé–projeté à l'aide de substitions : si $d = 1$, on peut associer à chaque couple constitué d'une substitution S admettant un "point fixe" (i.e à toute substitution S telle qu'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant $S((u_n)_n) = (u_n)_n$) et d'un mot $u = u_1 \dots u_s$ un ensemble de Delone dans $\mathbb{R}_+$. Pour ce faire, il suffit de se ramener à un alphabet $\mathcal{A}$ de réels strictement positifs deux à deux distincts (ce qui est aisé car $\mathcal{A}$ est fini) et de poser :

$$\Lambda_0 := \{\lambda_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$$

Où la suite $(\lambda_k)_k$ est définie par $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_{k+1} = u_k + \lambda_k$. On peut même obtenir un ensemble de Delone de $\mathbb{R}$ en symétrisant Λ_0.

On pourra trouver de plus amples détails sur cette méthode de construction et une généralisation aux dimensions $d > 1$ dans [Ber98].

---

[8] Il serait plus correct de parler ici de "demi–chaîne" de Fibonacci...
[9] Pour simplifier les choses, nous écrirons un mot $u = (u_1, \dots, u_s)$ sous la forme $u_1 \dots u_s$.

Chapitre 2

Diffraction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la théorie mathématique de la diffraction, à partir de laquelle est aujourd'hui définie la notion de cristal[1]. Nous commencerons par aborder les autocorrélations de mesures de Radon, avant de nous intéresser aux figures de diffraction générée par des ensembles de Delone, puis par des structures cristallines. Enfin, nous reviendrons sur le "paradoxe" découvert par Shechtman dans [SBGC84], dont nous donnerons une explication.

2.1 Notion d'autocorrélation

Dans la suite, pour tout $L > 0$, on notera C_L le cube (dans $\mathbb{R}^d$) de coté L centré en l'origine. Pour une mesure μ, on notera μ_L sa restriction à C_L. Il s'agit d'une mesure à support compact, donc le produit de convolution suivant est bien défini :

$$\gamma^L := \frac{1}{L^d}\mu_L * \tilde{\mu}_L$$

Ce qui nous permet d'introduire la notion d'*autocorrélation*.

Définition 2.1 (Autocorrélation)
Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\gamma^n := \frac{1}{n^d}\mu_n * \tilde{\mu}_n$$

Toute limite vague (au sens de la définition A.7) de la suite $(\gamma^n)_n$ est appelée autocorrélation de μ.

Exemple : *Posons $d = 1$.* Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $c(x)$ suivante existe :

$$c(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\xi)\overline{f(\xi)}d\xi$$

On appelle alors la fonction c autocorrélation de f. Or, si f est localement intégrable par rapport à λ, la mesure à densité f sous λ (noté $f\lambda$) a pour autocorrélation $c\lambda$. En effet, si $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\phi \in \mathcal{K},\ \frac{1}{n}(f\lambda_n * \tilde{f\lambda_n})(\phi) &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \phi(x+y)df\lambda_n(x)d\tilde{f\lambda}_n(y) \\
&= \frac{1}{n}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \phi(x+y)f(x)\overline{f(-y)}dxd\lambda(\overline{-y}) \\
&= \frac{1}{n}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \phi(z)f(z-y)\overline{f(-y)}dzd\lambda(-y) \text{ par changement de variable } z = x+y. \\
&= \frac{1}{n}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \phi(z)f(z+\xi)\overline{f(\xi)}dzd\xi \text{ par changement de variable } \xi = -y.
\end{aligned}$$

[1] Qui inclut désormais celle de quasi–cristal.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f\lambda_n * \tilde{f}\lambda_n)(\phi) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\phi(z)\left(\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} f(z+\xi)\overline{f(\xi)}d\xi\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(z)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} f(z+\xi)\overline{f(\xi)}d\xi\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(z)c(z)dz
\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. On a ainsi un lien entre "fonction d'autocorrélation" et "mesure d'autocorrélation" qui explique que l'on ne parle ici que d'autocorrélation, sans préfixe.

Définition 2.2 (Mesure bornée par translation)
Une mesure μ est dite bornée par translation si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe une constante $\alpha_K > 0$ telle que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\mu|(K+x) \leq \alpha_K$$

Exemple : Soit X un ensemble de Delone de type fini. On pose :

$$\mu := \sum_{x\in X}\delta_x$$

Alors la mesure μ est bornée par translation. En effet, comme X est localement fini et que les ensembles compacts $K+x$ peuvent être inclus dans la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(x, \mathrm{diam}(K))$, on a que $\mathrm{card}(K+x)\cap X < \infty$ et donc :

$$|\mu|(K+x) \leq |\mu|(\overline{\mathcal{B}}(x,\mathrm{diam}(K))) = \mathrm{card}(\overline{\mathcal{B}}(x,\mathrm{diam}(K))\cap X)$$

Or, X est de type fini et donc d'atlas localement fini par translation, i.e il n'existe qu'un nombre fini modulo translation d'ensembles de la forme $\overline{\mathcal{B}}(x,\mathrm{diam}(K))\cap X$ (les $\mathrm{diam}(K)$–pièces centrées) d'où le résultat.

Proposition 2.1
Si μ est une mesure bornée par translation admettant une autocorrélation γ, alors les mesures $\gamma^n, n\in\mathbb{N}^*$ sont bornées par translation avec des constantes α_K indépendantes de n.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $x\in\mathbb{R}^d$. Alors :

$$\begin{aligned}
|\mu_L * \tilde{\mu}_L|(K+x) &\leq |\mu_L| * |\tilde{\mu}_L|(K+x) \text{ par le lemme A.1.} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{K+x}(s+y)d|\mu_L|(s)d|\tilde{\mu}_L|(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{K+x-s}(y)d|\mu_L|(s)d|\tilde{\mu}_L|(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|\tilde{\mu}_L|(K+x-s)d|\mu_L|(s) \\
&\leq \alpha_K\int_{\mathbb{R}^d}d|\mu_L| \\
&\leq L^d\alpha_K\alpha_{C_1}
\end{aligned}$$

Donc $\forall n\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\gamma^n(K+x)\leq 2\alpha_K\alpha_{C_1}$.

2.2 Figure de diffraction d'une structure cristalline

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons exclusivement des ensembles de Delone admettant une unique autocorrélation, ce qui nous assureras (comme nous le verrons) l'existence et l'unicité de leur figure de diffraction. De cette façon, nous nous focaliserons sur les ensembles correspondant à de "véritables" cristaux, au sens physique du terme.

2.2.1 Spectre de Bragg

Définition 2.3 (Figure de diffraction)
Soit Λ un ensemble de Delone admettant une unique autocorrélation γ. Alors la transformée de Fourier $\widehat{\gamma}$ de γ est appelée figure de diffraction de Λ.

Dans ce cadre de travail, un théorème de Bochner (cf. [Sch66]) nous dit que $\widehat{\gamma}$ est une mesure positive se décomposant de façon unique comme suit :

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_d + \widehat{\gamma}_{sc} + \widehat{\gamma}_{ac}$$

Où $\widehat{\gamma}_d$ est une mesure discrète, $\widehat{\gamma}_{sc}$ une mesure singulière continue et $\widehat{\gamma}_{ac}$ une mesure absolument continue. On appelle alors *mesure de Bragg* de Λ la mesure $\widehat{\gamma}_d$, qui s'écrit (par définition de mesure discrète) :

$$\widehat{\gamma}_d = \sum_{\omega \in S} \widehat{\gamma}\left(\{\omega\}\right) \delta_\omega$$

Où S est un ensemble au plus dénombrable appelé *spectre de Bragg* de λ.

Introduisons à présent la notion de *cristal généralisé*, qui permet de modéliser les structures monophasées monocristallines, monophasées polycristallines, polyphasées monocristallines et polyphasées polycristallines.

Définition 2.4 (Cristal généralisé)
Un ensemble de Delone Λ est appelé cristal généralisé si son spectre de Bragg est infini.

2.2.2 Un théorème de Hof sur les figures de diffraction

Soit Λ un ensemble de Delone de type fini et soit $A = \Lambda - \Lambda$. "Physiquement", Λ représente les positions dans l'espace d–dimensionnel d'un ensemble d'atomes tandis que A est l'espace des "vecteurs interatomiques". On se munit de la mesure suivante, appelée *densité de* Λ :

$$\mu = \sum_{x \in \Lambda} m(x)\delta_x$$

Où chaque réel $m(x)$ est appelé *masse* de l'atome x. Dans un but de simplification, supposons que tous nos atomes sont de masse unité.

Dans la suite, on dira qu'un ensemble de Delone de type fini possède une autocorrélation γ si γ est une autocorrélation pour la mesure $\mu := \sum_{x\in\Lambda} \delta_x$.

Comme Λ est de type fini, l'ensemble A est localement fini. Pour $a \in A$ et $L > 0$, on pose :

$$\mathcal{N}_L(a) = \mathrm{card}\{x \in \Lambda \,|\, x \in C_L,\ x - a \in \Lambda \cap C_L\}$$

Le nombre $\mathcal{N}_L(a)$ représente en fait le nombre d'occurences de la différence a dans le cube C_L.

Posons ensuite, sous réserve d'existence, pour $a \in A$:

$$n(a) := \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^d}\mathcal{N}_L(a)$$

Le résultat suivant est du à Hof et permet de caractériser dans un certain cadre les figures de diffractions d'ensembles de Delone de type fini :

Théorème 2.2 (Hof)
Soit Λ un ensemble de Delone de type fini tel que $n(a)$ soit bien défini pour tout $a \in A := \Lambda - \Lambda$. Alors Λ possède une unique autocorrélation γ définie par :

$$\gamma = \sum_{a\in A} n(a)\delta_a$$

DÉMONSTRATION : Posons $\mu := \sum_{x\in\Lambda} \delta_x$. Alors :

$$\mu_L = \sum_{x\in X\cap C_L} \delta_x \quad \text{et} \quad \delta_x * \tilde{\delta_y} = \delta_x * \delta_{-y} = \delta_{x-y},$$

Donc on a :

$$\mu_L * \tilde{\mu}_L = \sum_{x\in X\cap C_L}\sum_{y\in X\cap C_L}\delta_{x-y} = \sum_{a\in A}\mathcal{N}_L(a)\delta_a$$

Soient à présent $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{K}$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset C_N$. Alors :

$$\gamma^L(f) = \frac{1}{L^d}\sum_{a\in A\cap C_N}\mathcal{N}_L(a)\delta_a(f)$$

Donc :

$$\gamma^L(f) \xrightarrow[L\to\infty]{} \sum_{a\in A} n(a)\delta_a(f)$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.2.1 (Cas d'un réseau)
Un réseau $\mathcal{R}$ est un cristal généralisé admettant une unique autocorrélation dont la figure de diffraction est :

$$\widehat{\gamma} = \frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}\mu_{\mathcal{R}^*}$$

Où α est une constante ne dépendant que du réseau $\mathcal{R}$. De plus, le spectre de Bragg de $\mathcal{R}$ est le réseau dual $\mathcal{R}^*$.

Démonstration : Commençons par remarquer que, pour $a \in \mathcal{R} - \mathcal{R} = \mathcal{R}$:

$$\mathcal{N}_L(a) = \mathrm{card}\{x \in \mathcal{R} \,|\, x \in C_L,\, x - a \in \mathcal{R}\cap C_L\} = \mathrm{card}\,(C_L \cap (\mathcal{R}+a))$$

Comme $a \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R} + a = \mathcal{R}$ et donc $\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_L(a)$ est indépendant de a. On peut donc poser :

$$\alpha = \lim_{L\to\infty}\frac{\mathcal{N}_L}{L^d}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathcal{R} - \mathcal{R}$, $n(x) = \alpha$ ne dépend pas de x. Or, d'après le théorème 2.2, $\mu_{\mathcal{R}}$ possède une unique autocorrélation donnée par :

$$\gamma = \sum_{x\in\mathcal{R}-\mathcal{R}} n(x)\delta_x$$

Ainsi, $\mu_{\mathcal{R}}$ a pour unique autocorrélation :

$$\gamma = \alpha\sum_{x\in\mathcal{R}}\delta_x = \alpha\mu_{\mathcal{R}}$$

On en déduit que, par (2.2) :

$$\widehat{\gamma} = \alpha\widehat{\mu_{\mathcal{R}}} = \frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}\mu_{\mathcal{R}^*}$$

Ainsi, $\widehat{\gamma}$ est discrète et :

$$\widehat{\gamma} = \sum_{x\in\mathcal{R}^*}\frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}\delta_x$$

Donc le spectre de Bragg de $\mathcal{R}$ est son réseau dual $\mathcal{R}^*$, qui est infini, donc $\mathcal{R}$ est un cristal généralisé. D'où le résultat.

2.2.3 Cristaux périodiques, intensité diffractée

Un réseau permet de modéliser une structure monoatomique régulière où tous les atomes sont placés sur les noeuds du dit réseau. La notion de cristal périodique associé à un réseau et un motif permet la modélisation de structures plus complexes.

Définition 2.5 (Cristal périodique associé à un réseau et un motif)
Soient $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathbb{R}^d$ et F un sous–ensemble fini de $\mathbb{R}^d$. On appelle cristal périodique associé au réseau $\mathcal{R}$ et au motif F l'ensemble :

$$\Lambda := \mathcal{R} + F$$

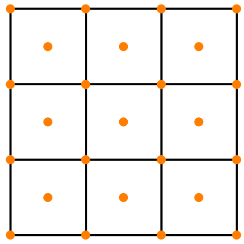

FIG. 2.1 – Cristal "cubique face centrée" en dimension 2.

Exemple : En se plaçant dans le cas $d = 2$ et en posant $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^2$ et $F = \left\{0, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, on obtient le cristal "cubique[2] face centrée" dans le plan :

Remarques :

1. Un cristal périodique est un quasi–cristal. En effet, c'est un ensemble de Delone et $\mathcal{R} + F - (\mathcal{R} + F) = \mathcal{R} - \mathcal{R} + (F - F) = \mathcal{R} + (F - F)$, avec $\mathrm{card}(F - F) < \infty$.
2. Quitte à remplacer F par l'un de ses sous–ensembles, on peut supposer que l'application $(d, \nu) \mapsto d + \nu$ est injective sur $\mathcal{R} \times F$. Dans la suite, nous nous placerons toujours dans un tel cadre.

Proposition 2.3
Soit $\mathcal{R}$ un réseau et soit $F \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble fini. On pose :

$$\mu_{\mathcal{R}} = \sum_{d \in \mathcal{R}} \delta_d \quad ; \quad \mu_F = \sum_{\nu \in F} \delta_\nu \quad ; \quad \mu_{\mathcal{R}+F} = \sum_{x \in \mathcal{R}+F} \delta_x$$

Alors :

$$\mu_{\mathcal{R}+F} = \mu_{\mathcal{R}} * \mu_F$$

DÉMONSTRATION : On a que :

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathcal{R}+F} &= \sum_{x \in \mathcal{R}+F} \delta_x \\
&= \sum_{d \in \mathcal{R}} \sum_{\nu \in F} \delta_{d+\nu} \\
&= \sum_{d \in \mathcal{R}} \sum_{\nu \in F} \delta_d * \delta_\nu \\
&= \left(\sum_{d \in \mathcal{R}} \delta_d \right) * \left(\sum_{\nu \in F} \delta_\nu \right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Donnons–nous un cristal périodique Λ associé à un réseau $\mathcal{R}$ et à un motif $F = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Physiquement, si on expose l'ensemble F à une radiation de longueur d'onde λ_0 et de direction Q_0, l'intensité diffractée par les atomes dans la direction Q s'écrit :

$$i(q) = \left| \sum_{j=1}^{N} e^{-2i\pi\langle q, x_j \rangle} \right|^2, \quad \text{où } q := \frac{Q - Q_0}{\lambda_0}.$$

On définit la mesure I de densité i par rapport à la mesure de Lebesgue. On a alors :

$$I = |\widehat{\mu_F}|^2 = \widehat{\mu_F * \tilde{\mu}_F}$$

[2] Bien que ce vocabulaire soit plus souvent employé pour le cristal idoine en dimension 3.

La première égalité découle de (A.2). Quant à la deuxième, elle est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathcal{S},\ \widehat{\mu_F * \tilde{\mu_F}}(f) &= \mu_F * \tilde{\mu_F}(\widehat{f}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x+y)d\mu_F(x)d\tilde{\mu_F}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x+y)d\left(\sum_{k=1}^N \delta_{x_k}\right)(x)\ d\left(\sum_{j=1}^N \delta_{-x_j}\right)(y) \\
&= \sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \widehat{f}(x_k - x_j) \\
&= \sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x_k - x_j, x\rangle}dx \\
&= \sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x_k, x\rangle}e^{2i\pi\langle x_j x\rangle}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi\langle x_k, x\rangle}\right)\left(\sum_{j=1}^N e^{2i\pi\langle x_j x\rangle}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left|\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi\langle x_k, x\rangle}\right|^2 dx
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.4
Soit Λ un cristal périodique associé au réseau $\mathcal{R}$ et au motif $F = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Alors Λ possède une unique autocorrélation donnée par :

$$\gamma = \alpha(\mu_F * \tilde{\mu_F} * \mu_{\mathcal{R}})$$

Où α est une constante ne dépendant que du réseau $\mathcal{R}$. De fait, sa figure de diffraction est alors :

$$\widehat{\gamma} = I\frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}\mu_{\mathcal{R}^*}$$

Démonstration : Démontrons que Λ possède une unique autocorrélation et calculons sa transformée de Fourier. Commençons par remarquer que comme les x_i appartiennent à un ensemble fini, pour L assez grand, on a $\mu_{F_L} = \mu_F$, $\tilde{\mu_F}_L = \tilde{\mu_F}$ et donc :

$$\frac{1}{L^d}(\mu_F * \mu_{\mathcal{R}})_L * \widetilde{(\mu_F * \mu_{\mathcal{R}})}_L = (\mu_F * \tilde{\mu_F}) * \left(\frac{1}{L^d}(\mu_{\mathcal{R}_L} * \tilde{\mu}_{\mathcal{R}_L})\right)$$

Nous avons donc réduit le problème à un calcul d'autocorrélation sur $\mu_{\mathcal{R}}$. Or, d'après le théorème 2.2, $\mu_{\mathcal{R}}$ possède une unique autocorrélation donnée par :

$$\gamma = \alpha\mu_{\mathcal{R}}$$

On en déduit que Λ admet une unique autocorrélation γ définie par :

$$\gamma = \alpha(\mu_F * \tilde{\mu_F} * \mu_{\mathcal{R}})$$

Où α est une constante ne dépendant que du réseau $\mathcal{R}$. Ainsi, si on applique la relation (A.3) et les propositions A.5 et 2.3 on obtient :

$$\widehat{\gamma} = I\frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}\sum_{z\in\mathcal{R}^*}\delta_z$$

2.3 Interprétation physique, lien avec les quasi–cristaux

Donnons nous un réseau $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^d$. Alors, d'après le corollaire 2.2.1, la figure de diffraction de $\mathcal{R}$ est la suivante :

$$\widehat{\gamma} = \sum_{z \in \mathcal{R}^*} \frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})} \delta_z$$

Où α est un réel ne dépendant que du réseau $\mathcal{R}$. Ainsi, la figure de diffraction d'un réseau correspond à son réseau dual. Par extension, nous avons vu (cf. proposition 2.4) que l'on pouvait également relier la figure de diffraction d'un cristal périodique à un réseau dual, via la formule :

$$\widehat{\gamma} = \sum_{z \in \mathcal{R}^*} \frac{\alpha}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})} |\mu_F|^2 \delta_z$$

En l'absence de preuve du contraire, il était considéré comme établi par les physiciens que toute figure de diffraction issue d'un cristal devait correspondre à un réseau dual, et donc que tout cristal était périodique. De fait, il avait été démontré que, sous cette condition, seul un nombre fini de sous–groupe du groupe orthogonal $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ pouvaient constituer le groupe ponctuel[3] d'un cristal : cette propriété était appelée *restriction cristallographique*. En particulier, un cristal ne pouvait posséder d'axe d'ordre 5.

Ce paradigme explique l'étonnement lors de la découverte (cf. [SBGC84]) en 1984 d'une structure dont la figure de diffraction, bien que présentant les taches fines caractéristiques d'un cristal, ne possédait aucune invariance par translation, et donc ne pouvait être construite à l'aide d'un réseau dual.

L'explication de cette apparente contradiction réside dans les causes réelles de ces "taches fines". En effet, une figure de diffraction présentera des taches fines si et seulement si on peut l'écrire sous la forme d'une somme pondérée de mesures de Dirac. Or, par définition, une figure de diffraction est la transformée de Fourier d'une autocorrélation, et si il est vrai que la figure de diffraction d'un cristal périodique s'écrira sous la forme d'une somme pondérée de mesures de Dirac, la réciproque est fausse[4]. Le postulat de périodicité des cristaux était donc erroné, ce qui ne remet pas en cause la validité purement mathématique de la restriction cristallographique mais la rend impropre à une caractérisation des cristaux "réels".

[3]On appelle groupe ponctuel d'un cristal le quotient du plus grand groupe de déplacements laissant le cristal invariant par intersection avec le groupe de translation $\mathbb{R}^3$ (cf. [Kat97] pour plus de détails).

[4]On trouvera plus de détails sur cet état de fait dans [CT87].

Chapitre 3

Fonctions presque périodiques, ε–dualité

Ce chapitre, majoritairement indépendant des précédents, traite d'une notion introduite par Harald Bohr : celle de fonction presque périodique. Nous nous intéresserons principalement à la façon dont les résultats usuels de l'analyse de Fourier, telle l'égalité de Parseval, se généralisent à cette classe d'applications, avant de discuter brièvement de l'ε–dualité des quasi–cristaux et du lien qui unit ces derniers aux fonctions presque périodiques.

3.1 Fonctions presque périodiques

Dans ce paragraphe, de nombreuses démonstrations seront traitées dans le cas $d = 1$ pour alléger les notations.

3.1.1 Définition, premières propriétés

Commençons par rappeler la définition usuelle suivante :

Définition 3.1 (Fonction périodique)
Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite périodique si il existe un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, dont les éléments sont appelés périodes de f, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $f(x + \lambda) = f(x)$.

Exemples :

1. Si $q \in \mathbb{Z}^d$, l'application $f_q : x \mapsto e^{2i\pi\langle q,x\rangle}$ est périodique et $\mathbb{Z}^d$ forme un réseau de ses périodes.
2. De même, toute somme finie d'applications f_q est périodique et $\mathbb{Z}^d$ forme un réseau de ses périodes.

On peut étendre certaines propriétés des fonctions continues périodiques à une classe plus large, celle des fonctions presque périodiques, définies comme suit :

Définition 3.2 (Fonction presque périodique)
Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite presque périodique si :
- *f est continue,*
- *$\forall \varepsilon > 0$, il existe un ensemble $\Lambda_\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ relativement dense, dont les éléments sont appelés ε–presque périodes de f, tel que :*

$$\forall \tau \in \Lambda_\epsilon,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Exemple : Une fonction f continue et périodique est presque périodique. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, le réseau des périodes de f forme un ensemble relativement dense de ε–presque périodes pour f.

Remarque : Si τ est une ε–presque période d'une fonction f, alors c'est une μ–presque période de f pour tout $\mu > \varepsilon$.

Lemme 3.1
Une fonction presque périodique est bornée.

DÉMONSTRATION : Soit f une telle fonction. En posant $\varepsilon = 1$ dans la définition et R le rayon minimal évoqué dans la définition de la relative densité pour Λ_1, on obtient que si $x \in \mathbb{R}^d$ et $\tau \in \Lambda_1$ tel que $\tau \in \bar{\mathcal{B}}(-x, R)$ alors $\|x+\tau\| = \|-x-\tau\| \leq R$. Ainsi, $|f(x+\tau)|$ est majoré par la borne supérieure M de $|f|$ sur $\bar{\mathcal{B}}(0, R)$. D'où :

$$|f(x)| \leq |f(x+\tau) - f(x)| + |f(x+\tau)| \leq M + 1$$

Donc f est bornée.

Proposition 3.1
Si f est une fonction presque périodique, $|f|^2$ l'est également.

DÉMONSTRATION : $|f|^2 = f \times \overline{f}$. Remarquons tout d'abord que $\overline{f}$ est presque périodique car :

$$\forall x, \tau \in \mathbb{R}^d,\ |\overline{f}(x+\tau) - \overline{f}(x)| = |f(x+\tau) - f(x)|$$

De plus, pour cette même raison, tout ε–presque période de f est une ε–presque période de $\overline{f}$. Enfin, pour tout $\varepsilon > 0$, on a que, d'après le lemme 3.1, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et τ une ε–presque période de f (et donc de $\overline{f}$) :

$$|f \times g(x+\tau) - f \times g(x)| = |f(x+\tau)\left(\overline{f}(x+\tau) - \overline{f}(x)\right) + \overline{f}(x)\left(f(x+\tau) - f(x)\right)| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$$

D'où le résultat.

3.1.2 Sommes trigonométriques finies

De nombreux ouvrages traitant des fonctions presque périodiques (cf. par exemple [Cor68]) les définissent à l'aide des sommes trigonométriques finies. Si nous avons ici choisi de conserver le formalisme employé par Meyer dans [Mey95], nous ne pouvions mener une étude, même succinte, de ces applications sans énoncer leur caractérisation à l'aide des sommes trigonométriques finies (théorème 3.3).

Définition 3.3 (Somme trigonométrique finie)
Soit $F \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble fini.Une somme trigonométrique finie est une fonction $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de la forme :

$$S : x \mapsto \sum_{\lambda \in F} c_\lambda e^{i\langle \lambda, x \rangle}$$

Proposition 3.2 (Condition suffisante de presque périodicité)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour toute suite $(h_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ on puisse extraire de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie ci–dessous une suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ f_n(x) = f(x + h_n)$$

Alors f est presque périodique.

DÉMONSTRATION : Raisonnons par l'absurde : si f est une fonction vérifiant l'hypothèse et n'étant pas presque périodique, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\ell > 0$ il existe une boule de rayon ℓ ne contenant aucune ε–presque période de f. Soient donc $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d$ tels que la boule $\mathcal{B}(h_2, \|h_1\| + 1)$ ne contienne aucune ε–presque période de f. Le point $h_2 - h_1 \in \mathcal{B}(h_2, \|h_1\| + 1)$ et donc n'est pas une ε–presque période pour f. De même, il existe un point $h_3 \in \mathbb{R}^d$ tel que la boule $\mathcal{B}(h_3, \|h_1\| + \|h_2\| + 1)$ ne contienne aucune ε–presque période de f et donc les points $h_3 - h_1$ et $h_3 - h_1$ ne sont pas des ε–presque périodes pour f. En itérant ce procédé, on construit une suite $(h_n)_n$ telle que pour tous entiers $i, j \geq 1$, le point $h_j - h_i$ ne soit pas une ε–presque période de f, ce qui implique que :

$$\forall i, j \geq 1,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + h_i) - f(x + h_j)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + h_i - h_j) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Et donc $(f_n)_n$ ne peut admettre de sous–suite uniformément convergente, ce qui contredit l'hypothèse sur f.

3.1.3 Caractérisation à l'aide des sommes trigonométriques

Théorème 3.3
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Sont alors équivalentes :

(i) f est presque périodique ;

(ii) f est limite uniforme d'une suite de sommes trigonométriques finies.

DÉMONSTRATION : *(dans le cas $d = 1$)*

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit f une fonction presque périodique.

(a) D'après le lemme 3.1, f est bornée.

(b) Démontrons que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux réels $\ell(\varepsilon), \delta(\varepsilon) > 0$ tels que tout intervalle de longueur $\ell(\varepsilon)$ contienne un sous–intervalle de longueur $\delta(\varepsilon)$ dont tous les points sont des ε–presque périodes pour f.

Soit donc $\varepsilon > 0$. On se donne le rayon ℓ_1 de relative densité liée à $\frac{\varepsilon}{2}$. f est continue donc uniformément continue sur le compact $[-1, 1 + \ell_1]$ donc $\exists \delta_1 > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall |h| \leq \delta_1,\ |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\tau \in \Lambda_{\frac{\varepsilon}{2}}$. τ est contenu dans un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha+\ell_1]$, avec α judicieusement choisi. Ainsi, si $|h| \leq \delta_1,\ \tau + h \in [\alpha - \delta_1, \alpha + \ell_1 + \delta_1]$.
De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+\tau+h) - f(x)| \leq |f(x+\tau+h) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Donc $\tau + h \in \Lambda_\varepsilon$. Ainsi, $\ell(\varepsilon) = \ell_1 + 2\delta_1$ et $\delta(\varepsilon) = 2\delta_1$ conviennent.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\ell = \ell(\varepsilon)$ et $\delta = \delta(\varepsilon)$. Si $k \in \mathbb{Z}$, on définit $I_k = [k\ell, (k+1)\ell]$, et $\Delta_k = \left[\tau_k - \frac{\delta}{2}, \tau_k + \frac{\delta}{2}\right]$ un sous intervalle de I_k composé de ε–presque périodes de f (cf. supra). On construit ensuite la fonction K comme suit : $K(s) = \begin{cases} \frac{3\ell}{\delta} & \text{si} \quad s \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
De plus, on définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} f(x+s+t) K(s) K(t) ds dt$$

Alors, $\forall x, s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f(x+s+t - f(x)| K(s) K(t) &\leq (|f(x+s) - f(x)| + |f(x+s) - f(x+s+t)|)\, K(s) K(t) \\ &\leq 2\varepsilon K(s) K(t) \quad \text{car } K(s)K(t) = 0 \text{ dès que } (s,t) \notin \Lambda_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

De plus, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \int_{-n\ell}^{n\ell} K(t) dt &= \int_{\bigcup_{k=-n}^{n-1} \Delta_k} K(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{3\ell}{\delta} \int_{\Delta_k} dt \\ &= \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{3\ell}{\delta} \delta \\ &= 6n\ell \end{aligned}$$

De plus, on déduit de ce même calcul que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} f(x) K(s) K(t) ds dt$$

Donc, finalement :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} |f(x+s+t) - f(x)| K(s)K(t)dsdt \\
&\leq \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} 2\varepsilon K(s)K(t)dsdt \\
&= \frac{2\varepsilon}{(6n\ell)^2} \left(\int_{-n\ell}^{n\ell} K(s)ds \right)^2 \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}$$

(d) Fixons $n \geq 1$. On définit les deux fonctions $6n\ell$–périodiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f}_n(x) = f(x) \quad \text{si } |x| \leq 3n\ell \\ K_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} K(x) & \text{si } |x| \leq n\ell \\ 0 & \text{si } n\ell < |x| \leq 3n\ell \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On note leurs séries de Fourier respectives $\sum A_{n,k} e^{i\omega_{n,k}\cdot}$ et $\sum a_{n,k} e^{i\omega_{n,k}\cdot}$, où $\omega_{n,k} = \dfrac{k\pi}{3n\ell}$. Alors, on a que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_{n,k}|^2 \leq M^2, \quad \text{où } M = \|f\|_\infty \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n,k}|^2 = \frac{3\ell}{\delta} \tag{3.2}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ |a_{n,k}| \leq \min \left\{ 1, \frac{2}{\delta |\omega_{n,k}|} \right\} \tag{3.3}$$

Les relations (3.1) et (3.2) découlent de l'égalité de Parseval appliquée aux fonctions périodiques $\overline{f}_n$ et K_n. Pour obtenir (3.1), il suffit de remarquer que $\|.\|_2 \leq \|.\|_\infty$, où $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} |f(t)|^2 dt}$, par inégalité de la moyenne. Pour (3.2), Parseval s'écrit : $\|K_n\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n,k}|^2$. Or :

$$\begin{aligned}
\|K_n\|_2^2 &= \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} (K_n(t))^2 dt \\
&= \|K_n\|_2^2 \\
&= \frac{1}{6n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} (K(t))^2 dt \\
&= \frac{1}{6n\ell} \frac{9\ell^2}{\delta^2} \sum_{k=-n}^{n-1} \delta \\
&= \frac{3\ell}{\delta}
\end{aligned}$$

Pour établir la relation (3.3), remarquons que :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z},\ |a_{n,k}| &= \left| \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(x) e^{-i\omega_{n,k}x} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(x) dx \\
&\leq \frac{1}{6n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} K(x) dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z},\ |a_{n,k}| &= \left| \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(x) e^{-i\omega_{n,k}x} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(x) e^{-i\omega_{n,k}x} dx \right| \\
&= \frac{1}{6n\ell} \left| \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{3\ell}{\delta} \int_{\Delta_j} e^{-i\omega_{n,k}x} dx \right| \\
&= \frac{1}{6n\ell} \left| \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{3\ell}{\delta} \frac{-1}{i\omega_{n,k}} e^{-i\tau_k} (e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{i\frac{\delta}{2}}) \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta|\omega_{n,k}|} |e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{i\frac{\delta}{2}}| \\
&\leq \frac{2}{\delta|\omega_{n,k}|}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Notons que d'après le (3.1), $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|A_{n,k}|^2 \leq M^2$ et donc $|A_{n,k}| \leq M$.

(e) Démontrons à présent que si $|x| < n\ell$ on a le développement suivant, avec convergence absolue et uniforme de la série :

$$f_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,k} a_{n,-k}^2 e^{i\omega_{n,k}x} \tag{3.4}$$

Pour ce faire, considérons la fonction auxiliaire f_n^* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n^*(x) = \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} \overline{f}_n(x+s+t) K_n(s) K_n(t) ds dt$$

Il est immédiat que f_n^* est continue et $6n\ell$–périodique. De plus, par construction de K_n, on a l'identité :

$$f_n^*(x) = \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} \overline{f}_n(x+s+t) K(s) K(t) ds dt$$

Ainsi, si $|x| < n\ell$:

$$f_n^*(x) = \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-n\ell}^{n\ell} \int_{-n\ell}^{n\ell} f(x+s+t) K(s) K(t) ds dt = f_n(x) \tag{3.5}$$

Soient $(b_{n,k})_k$ les coefficients de Fourier de f_n^*. Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
b_{n,k} &= \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} f_n^*(x) e^{-i\omega_{n,k}x} dx \\
&= \frac{1}{(6n\ell)^2} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(s) K_n(t) \frac{1}{6n\ell} \int_{-3n\ell}^{3n\ell} \overline{f}_n(x+s+t) e^{-i\omega_{n,k}x} dx ds dt \\
&= \frac{1}{(6n\ell)^3} \left(\int_{-3n\ell}^{3n\ell} K_n(s) e^{i\omega_{n,k}s} ds \right)^2 \int_{-3n\ell}^{3n\ell} \overline{f}_n(u) e^{-i\omega_{n,k}u} du \text{ par changement de variable "}u = x+s+t\text{".} \\
&= A_{n,k} a_{n,-k}^2
\end{aligned}$$

Or, $|A_{n,k} a_{n,-k}^2| \leq |A_{n,k} a_{n,-k}|$ par (3.3), donc $|A_{n,k} a_{n,-k}^2| \leq \dfrac{1}{2}(|A_{n,k}|^2 + a_{n,-k}|^2)$, donc $\sum |b_{n,k}|$ converge donc la série de Fourier de f_n^* converge uniformément et donc sa somme est f_n^*. Ainsi, d'après (3.5), on obtient (3.4).

(f) Démontrons à présent qu'il existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ indépendant de n tel que l'on ait, pour $|x| < n\ell$:

$$\left| f_n(x) - \sum_{|\omega_{n,k}| \leq \lambda} A_{n,k} a_{n,-k}^2 e^{i\omega_{n,k}x} \right| < \varepsilon \tag{3.6}$$

– Tout d'abord, montrons qu'il existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\sum_{|\omega_{n,k}| > \lambda} |A_{n,k}||a_{n,-k}|^2 < \varepsilon \tag{3.7}$$

Remarquons que quand $|\omega_{n,k}| > \lambda$, la relation (3.3) implique que $|a_{n,-k}| < \dfrac{2}{\delta\lambda}$. De plus, comme ℓ et δ ne dépendent que de ε et que M est une constante du problème, on a que :

$$\begin{aligned}
\forall\lambda > 0, \sum_{|\omega_{n,k}| > \lambda} |A_{n,k}||a_{n,-k}|^2 &< \frac{2}{\delta\lambda} \sum_{|\omega_{n,k}| > \lambda} |A_{n,k}||a_{n,-k}| \\
&\leq \frac{2}{\delta\lambda} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_{n,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n,-k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par inégalité de Hölder.} \\
&\leq \frac{2\sqrt{3}M\sqrt{\ell}}{\delta^{\frac{3}{2}}\lambda} \quad \text{par (3.1) et (3.2).}
\end{aligned}$$

Il est ensuite assez aisé de rendre cette quantité inférieure à ε : il suffit de poser $\lambda(\varepsilon) = \dfrac{2\sqrt{3}M\sqrt{\ell}}{\delta^{\frac{3}{2}}\varepsilon}$.

– Ainsi, d'après (3.4), si $|x| < n\ell$,

$$f_n(x) - \sum_{|\omega_{n,k}| \leq \lambda} A_{n,k} a_{n,-k}^2 e^{i\omega_{n,k}x} = \sum_{|\omega_{n,k}| > \lambda} |A_{n,k}||a_{n,-k}|^2$$

D'où le résultat.

(g) Remarquons que pour n fixé, il n'existe qu'un nombre fini, disons de $k \in \mathbb{Z}$ tels que $|\omega_{n,k}| \leq \lambda$. Quitte à réordonner, supposons que ce sont les entiers $1 \dots r_n$. Notons à présent $(B_{n,q})_{1 \leq q \leq r_n}$ la suite des $A_{n,k}$ classés par ordre de module décroissant. On note ensuite $\mu_{n,q}$ (resp. $\alpha_{n,q}$) les $\omega_{n,k}$ (resp. $a_{n,-k}$) correspondants. Pour tout $1 \leq q \leq r_n$ on pose enfin $C_{nq} = B_{n,q}\alpha_{n,q}^2$. Démontrons qu'il existe $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $|x| < n\ell$:

$$\left| f_n(x) - \sum_{q=1}^{m} C_{n,q} e^{i\mu_{n,q}x} \right| < 2\varepsilon \tag{3.8}$$

Dans cette optique, commençons par montrer que l'on peut choisir un m indépendant de n tel que :

$$\sum_{q=m}^{r_n} |C_{n,q}| < \varepsilon \tag{3.9}$$

Soit $1 \leq p \leq r_n$. Comme $\sum_{q=1}^{p} |B_{n,q}|^2 \leq M^2$ (par (3.1)) et que la suite $(|B_{n,q}|)_q$ décroit, on a que :

$$M^2 \geq \sum_{q=1}^{p} |B_{n,q}|^2 \geq p|B_{n,p}|^2$$

D'où :

$$|B_{n,p}| \leq \frac{M}{\sqrt{p}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{q=p}^{r_n} |C_{n,q}| &= \sum_{q=p}^{r_n} |B_{n,q}||\alpha_{n,q}|^2 \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{p}} \sum_{q=p}^{r_n} |\alpha_{n,q}|^2 \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{p}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{n,k}|^2\end{aligned}$$

Pour rendre cette quantité plus petite strictement que ε, il suffit donc de prendre $p > m(\varepsilon) := \left\lfloor \dfrac{9\ell^2 M^2}{\delta^2 \varepsilon^2} \right\rfloor$. Or, la relation (3.6) peut aussi s'écrire, pour $|x| < n\ell$:

$$\left| f_n(x) - \sum_{q=1}^{r_n} C_{n,q} e^{i\mu_{n,q} x} \right| < \varepsilon \tag{3.10}$$

On obtient donc (3.8) en combinant (3.9) et (3.10).

(h) On déduit de ce qui précède que si $|x| < n\ell$, alors

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{m} C_{n,q} e^{i\mu_{n,q} x} \right| < 4\varepsilon \tag{3.11}$$

En effet, on a $|C_{n,q}| \leq |B_{n,q}| \leq M$ et $|\mu_{n,q}| \leq \lambda(\varepsilon)$.
Par applications successives du théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une suite d'indices $(n_k)_k$ telle que $(C_{n_k,q})_k$ et $(\mu_{n_k,q})_k$ soient convergentes de limites respectives C_q et μ_q. Ainsi, en remplaçant n par n_k dans (3.11), et en y faisant tendre k vers l'infini, on obtient :

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{m} C_q e^{i\mu_q x} \right| < 4\varepsilon$$

Ainsi, on a bien approché uniformément f par des sommes trigonométriques finies.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Cette démonstration se fait en deux étapes :

(a) La limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_j)_j$ presque périodiques est presque périodique.
Soit $\varepsilon > 0$. Si on appelle $\widehat{f}$ cette limite, et que τ est une $\dfrac{\varepsilon}{3}$–presque période pour f_J, où $J \in \mathbb{N}$ vérifie $\|\widehat{f} - f_J\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ |\widehat{f}(x+\tau) - \widehat{f}(x)| &\leq |\widehat{f}(x+\tau) - f_J(x+\tau)| + |f_J(x+\tau) - f_J(x)| + |\widehat{f}(x) - f_J(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) Une somme trigonométrique finie est presque périodique. Démontrons le tout d'abord pour $f : x \mapsto e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $(h_n)_n$ est une suite de nombres réels, alors la suite de fonctions $f_n : x \mapsto f(x + h_n) = e^{i\lambda x} e^{i\lambda h_n}$ possède une sous–suite uniformément convergente.
En effet, comme la suite complexe $(e^{i\lambda h_n})_n$ est bornée, il existe d'après le théorème de Bolzano–Weierstrass une sous–suite $(h_{\varphi(n)})_n$ de $(h_n)_n$ telle que la suite $(e^{i\lambda h_{\varphi(n)}})_n$ converge. Ainsi, pour tous $m, n \geq 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x + h_{\varphi(n)}) - f(x + h_{\varphi(m)})| = |e^{i\lambda h_{\varphi(n)}} - e^{i\lambda h_{\varphi(m)}}|$$

D'où :

$$\|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\|_\infty = |e^{i\lambda h_{\varphi(n)}} - e^{i\lambda h_{\varphi(m)}}|$$

Et donc la suite $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après le critère de Cauchy. Ainsi, f est normale donc presque périodique.

On étend ce résultat au cas où f est une somme trigonométrique finie en remarquant que comme on a démontré que toute fonction presque périodique était limite de sommes trigonométriques finies, une somme de fonctions presque périodiques reste presque périodique. D'où le théorème !

Corollaire 3.3.1
L'espace $(\mathcal{AP}(d), +, \times, .)$ des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}^d$ est une sous–algèbre sur $\mathbb{C}$ de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : Le seul point que nous n'ayons déjà démontré est que si f et g sont deux fonctions presque périodiques, respectivement limites uniformes de suites $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ de sommes trigonométriques finies, alors $f \times g$ est presque periodique. Ceci découle du fait que si $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|f \times g(x) - S_n \times T_n(x)| = |f(x)\,(g(x) - T_n(x)) - T_n(x)\,(S_n(x) - f(x))|$$

Ce qui implique que :

$$\|f \times g - S_n \times T_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g - T_n\|_\infty + \|T_n\|_\infty \|S_n - f\|_\infty$$

Comme la suite $(\|T_n\|_\infty)_n$ est bornée, on a bien la convergence uniforme de $S_n \times T_n$ vers $f \times g$, ce qui nous livre le résultat.

3.2 Coefficients de Fourier d'une fonction presque périodique

3.2.1 Valeur moyenne, coefficients de Fourier

Proposition 3.4 (Valeur moyenne d'une fonction presque périodique)
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction presque périodique.
Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$, on note $|\mathcal{B}(a, R)|$ le volume de la boule ouverte de centre a et rayon R.
Alors, la limite suivante, appelée valeur moyenne de f existe et ne dépend pas de a :

$$\mathcal{M}(f) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{|\mathcal{B}(a, R)|} \int_{\mathcal{B}(a,R)} f(x)dx$$

Démonstration : *(dans le cas $d = 1$)*
Notons tout d'abord que dans ce cas, on peut écrire que :

$$\frac{1}{|\mathcal{B}(a, R)|} \int_{\mathcal{B}(a,R)} f(x)dx = \frac{1}{2R} \int_{a-R}^{a+R} f(x)dx$$

Démontrons tout d'abord la propriété dans le cas d'une somme trigonométrique finie. Soit donc $S : x \mapsto c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}$, les $\lambda_k \neq 0$, une telle somme. Alors :

$$\frac{1}{2R} \int_{a-R}^{a+R} S(x)dx = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\lambda_k(a+R) - i\lambda_k(a-R)}}{2Ri\lambda_k}$$

Donc :

$$\left| \frac{1}{2R} \int_{a-R}^{a+R} S(x)dx - c_0 \right| \leq \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

Cette limite étant indépendante de a. Donc $\mathcal{M}(S)$ est bien définie et vaut c_0.

Traitons à présent le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 3.3, on sait qu'il existe une somme trigonométrique finie S telle que $\|f - S\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.12}$$

Comme $\mathcal{M}(S)$ est bien définie, la suite $\left(\frac{1}{2R} \int_{a-R}^{a+R} S(x)dx\right)_R$ est de Cauchy car convergente. Ainsi, $\exists R(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall R_1, R_2 \geq R(\varepsilon)$ on ait :

$$\left| \frac{1}{2R_1} \int_{a-R_1}^{a+R_1} S(x)dx - \frac{1}{2R_2} \int_{a-R_2}^{a+R_2} S(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.13}$$

D'après les relations (3.12) et (3.13), on a alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2R_1}\int_{a-R_1}^{a+R_1} f(x)dx - \frac{1}{2R_2}\int_{a-R_2}^{a+R_2} f(x)dx\right| &\leq \frac{1}{2R_1}\int_{a-R_1}^{a+R_1} |f(x)-S(x)|dx \\ &+ \left|\frac{1}{2R_1}\int_{a-R_1}^{a+R_1} S(x)dx - \frac{1}{2R_2}\int_{a-R_2}^{a+R_2} S(x)dx\right| \\ &+ \frac{1}{2R_2}\int_{a-R_2}^{a+R_2} |f(x)-S(x)|dx \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{1}{2R}\int_{a-R}^{a+R} f(x)dx\right)_{R\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathbb{R}$ donc y converge. Donc $\mathcal{M}(f)$ est bien définie.

On sait par le lemme 3.1 que f est bornée, posons donc $M = \|f\|_\infty$. Soit $R > |a|$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2R}\left|\int_{a-R}^{a+R} f(x)dx - \int_{-R}^{R} f(x)dx\right| &= \frac{1}{2R}\left|\int_{R}^{a+R} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx + \int_{a-R}^{a} f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx\right| \\ &= \frac{1}{2R}\left|\int_{R}^{a+R} f(x)dx + \int_{a-R}^{a} f(x)dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2R}2|a|M = \frac{M|a|}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{a-R}^{a+R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{R}^{R} f(x)dx$$

Ainsi, $\mathcal{M}(f)$ ne dépend pas de a, ce qui conclut la démonstration.

Lemme 3.2
Soient f et g deux fonctions presque périodiques, ainsi que $c \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\mathcal{M}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{M}(f)} \tag{3.14}$$

$$\mathcal{M}(cf) = c\mathcal{M}(f) \tag{3.15}$$

$$\textit{Si } f \geq 0, \textit{ alors } \mathcal{M}(f) \geq 0 \tag{3.16}$$

$$\mathcal{M}(f+g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) \tag{3.17}$$

DÉMONSTRATION : Immédiat.

Définition 3.4 (Coefficients de Fourier d'une fonction presque périodique)
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction presque périodique, et soit $\omega \in \mathbb{R}^d$.
On définit le coefficient de Fourier de f en ω par la formule :

$$\gamma(\omega) = \mathcal{M}\left(x \mapsto f(x)e^{-i\langle\omega,x\rangle}\right)$$

Remarquons que ces coefficients sont bien définis car le produit de deux fonctions presque périodiques l'est également.

Exemple : Soit S une somme trigonométrique finie. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$S(x)e^{-i\langle\omega,x\rangle} = \sum_{\lambda\in F} c_\lambda e^{i\langle\lambda-\omega,x\rangle}$$

Ainsi :

(i) Si il existe $\lambda \in F$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\langle\lambda-\omega,x\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors d'après les calculs effectués lors de la démonstration de la proposition 3.4, $\gamma(\omega) = c_\lambda$. Or la condition précendente est équivalente à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\langle\omega,x\rangle = \langle\lambda,x\rangle + 2k\pi$. En particulier, pour $x = e_j$, $1 \leq j \leq d$, on a :

$$\omega_j = \lambda_j + 2k\pi$$

Et donc, si on pose $e = (1,\ldots,1)$ on a que $\omega \in F + e\mathbb{Z}$.

(ii) Sinon, on montre de de même que $\gamma(\omega) = 0$.

3.2.2 Égalité de Parseval

Lemme 3.3
Soient $\mu_1 \dots \mu_n$ n réels deux à deux distincts.
On définit sur $\mathbb{R}^d$ la fonction suivante :

$$\varphi : (c_1, \dots, c_n) \mapsto \mathcal{M}\left(x \mapsto \left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k x}\right|^2\right)$$

Alors :

(i) φ atteint un minimum en $(\gamma(\mu_1), \dots, \gamma(\mu_n))$;

(ii)

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(\mu_k)|^2 \leq \mathcal{M}(|f|^2) \tag{3.18}$$

Démonstration : *(dans le cas $d = 1$)*
La première étape consiste à développer $\varphi(c_1, \dots, c_n)$ en utilisant le fait que $|x|^2 = x\overline{x}$ ainsi que les relations (3.14), (3.15) et (3.17), ce qui donne, pour $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\varphi(c_1, \dots, c_n) = \mathcal{M}(|f|^2) &- \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\mathcal{M}(x \mapsto f(x)e^{-i\mu_k x}) \\ &- \sum_{k=1}^{n} c_k\mathcal{M}(x \mapsto \overline{f}(x)e^{i\mu_k x}) \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_k\overline{c_h}\mathcal{M}(x \mapsto e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_h x})\end{aligned}$$

Or, pour h, k entiers compris entre 1 et n, on a, si $h \neq k$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2R}\int_{a-R}^{a+R} e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_h x}dx\right| &= \left|\frac{e^{i(\mu_k-\mu_h)a}}{2Ri(\mu_k-\mu_h)}(e^{i(\mu_k-\mu_h)R} - e^{-i(\mu_k-\mu_h)R})\right| \\ &\leq \frac{1}{R(\mu_k-\mu_h)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Si $h = k$, on a immédiatement que $\frac{1}{2R}\int_{a-R}^{a+R} e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_h x}dx = 1$. Ainsi $\mathcal{M}(x \mapsto e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_h x}) = \delta_{h,k}$.
Ainsi :

$$\varphi(c_1, \dots, c_n) = \mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\gamma(\mu_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{\gamma(\mu_k)} + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

On a donc clairement que φ atteint un minimum en $(\gamma(\mu_1), \dots, \gamma(\mu_n))$, et que la valeur de ce minimum est $\mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} |\gamma(\mu_k)|^2$. Comme φ est à valeurs positives d'après (3.16), on obtient (3.18).

Définition 3.5 (Spectre d'une fonction presque périodique)
Soit f une fonction presque périodique. On appelle spectre de f l'ensemble $\mathrm{Sp}(f) = \{\omega \in \mathbb{R}^d \mid \gamma(\omega) \neq 0\}$.

Exemple : On a vu précédemment que si S est une somme trigonométrique finie indexée par un ensemble F alors son spectre vérifie $\mathrm{Sp}(f) = F + e\mathbb{Z}$.

Lemme 3.4
Le spectre d'une fonction presque périodique est dénombrable.

Démonstration : Soit f une fonction presque périodique. D'après (3.18), il y a au plus $\lfloor \mathcal{M}(|f|^2) \rfloor$ vecteurs ω tels que $|\gamma(\omega)| \geq 1$. De même, pour tout entier $n \geq 1$, il ne peut exister qu'un nombre fini de vecteurs ω tels que $\dfrac{1}{n+1} \leq |\gamma(\omega)| \leq \dfrac{1}{n}$. Donc $\mathrm{Sp}(f)$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ensembles finis donc est dénombrable.

Proposition 3.5 (Égalité de Parseval)
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction presque périodique. Alors :

$$\mathcal{M}(|f|^2) = \sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(f)} |\gamma(\omega)|^2$$

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 3.3, si $\mu_1 \dots \mu_n$ sont n réels deux à deux distincts, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(\mu_k)|^2 \leq \mathcal{M}(|f|^2)$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette relation, on obtient que, pour toute suite $(\mu_n)_n$ de réels distincts deux à deux :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(\mu_k)|^2 \leq \mathcal{M}(|f|^2)$$

En particulier, comme (lemme 3.4) $\mathrm{Sp}(f)$ est dénombrable, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(f)} |\gamma(\omega)|^2 \leq \mathcal{M}(|f|^2) \tag{3.19}$$

Définissons à présent, pour toute somme trigonométrique finie $T : x \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x}$, avec Λ choisi de telle sorte que *tous* les c_λ soient non nuls, on définit la somme trigonométrique finie $T^* : x \mapsto \sum_{\omega \in \Lambda \cap \mathrm{Sp}(f)} \gamma(\omega) e^{i\omega x}$, avec la convention qu'une somme indexée par l'ensemble vide est nulle.

La fonction f est presque périodique, donc il existe une suite $(S_n)_n$ de sommes trigonométriques finies telles que :

$$\forall n \geq 1,\, \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3.20}$$

Il découle de la relation (3.20) que $\forall n \geq 1$, $\mathcal{M}(|f - S_n|^2) \leq \dfrac{1}{n}$. Ainsi, d'après le lemme 3.3, comme le minimum de la fonction φ est atteint ici en les $\gamma(\omega)$, on a :

$$\mathcal{M}(|f - S_n^*|^2) \leq \mathcal{M}(|f - S_n|^2) \leq \frac{1}{n}$$

D'après les calculs de minimum effectués dans le cadre de la preuve du lemme 3.3, on a de plus que :

$$\mathcal{M}(|f - S_n^*|^2) = \mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(f)} |\gamma(\omega)|^2$$

Et, comme $\mathcal{M}(|f - S_n^*|^2) \leq \dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\forall n \geq 1,\ \mathcal{M}(|f|^2) \leq \sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(f)} |\gamma(\omega)|^2 + \frac{1}{n}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient que $\mathcal{M}(|f|^2) \leq \sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(f)} |\gamma(\omega)|^2$, ce qui combiné avec (3.19) nous permet de conclure.

3.3 ε–dualité, lien avec les quasi–cristaux

Ce paragraphe est plus une ouverture qu'un exposé rigoureux sur le lien entre fonctions presque périodiques et quasi–cristaux. Le sujet est en effet particulièrement complexe et encore en développement. On pourra trouver de très nombreux détails sur le sujet de l'ε–dualité des quasi–cristaux dans l'article de Moody ([Moo97]) et dans la thèse de Bernuau ([Ber98]).

Le lien entre quasi–cristaux et fonctions presque périodiques est énoncé par Yves Meyer dans [Mey95] en les termes suivants :

Théorème 3.6 (Meyer)
Soit Λ un quasi-cristal. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a que :

1. *l'ensemble Λ^*_ε défini ci–après (et appelé* ε–dual de Λ*) est un quasi–cristal :*

$$\Lambda^*_\varepsilon := \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,|\, \forall \lambda \in \Lambda,\ |e^{2i\pi\langle\lambda,y\rangle} - 1| \leq \varepsilon \right\}$$

2. *pour toute fonction presque périodique f telle que* $\mathrm{Sp}(f) \subset \Lambda$*, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall y \in \Lambda^*_\varepsilon,\ \|f(.-y) - f\|_\infty \leq C\varepsilon \|f\|_\infty$$

Une démonstration de la première partie ce résultat peut être trouvée dans [Moo97], mais nécessite trop de pré–requis pour être abordée dans le cadre de cet exposé. Cependant, arrêtons nous un instant sur la deuxième conclusion de ce théorème :
Pour toute fonction presque périodique f telle que $\mathrm{Sp}(f) \subset \Lambda$*, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall y \in \Lambda^*_\varepsilon,\ \|f(.-y) - f\|_\infty \leq C\varepsilon \|f\|_\infty$$

Ce résultat exprime donc le fait que si Λ est un quasi–cristal et f une fonction presque périodique telle que $\mathrm{Sp}(f) \subset \Lambda$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ε–dual de Λ est composé d'ε–presque périodes de f, ce qui nous permet d'obtenir des informations sur f à partir de son spectre.

Notons que dans le cas d'un réseau, on a l'élégant résultat suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans [Ber98] :

Proposition 3.7
Soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini F_ε tel que :

$$\mathcal{R}^*_\varepsilon = \mathcal{R}^* + F_\varepsilon$$

De plus, Bernuau expose dans cette même référence une série de cas particuliers dans lesquels l'ε–dual d'un ensemble coupé–projeté irréductible est lui–même un ensemble coupé–projeté irréductible.

Un autre lien (cf. [Mey95] et [Lag00]) existe entre fonctions presque périodiques et quasi–cristaux, via la notion de *mesure presque périodique* .

Définition 3.6 (Mesure presque périodique)
Une mesure de Radon μ est dite presque périodique si la fonction suivante l'est, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\Phi(g) : t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)d\mu(x)$$

On dira alors qu'un ensemble de Delone Λ est *presque périodique* si sa densité μ_λ l'est. On peut alors démontrer qu'un cristal périodique est un ensemble presque périodique. Sans entrer dans les détails, nous nous contenterons de mentionner que l'étude des quasi–cristaux implique celle des densités presque périodiques dont la transformée de Fourier reste presque périodique. On montre de plus que si Λ est un quasi cristal de densité

$$\mu_\Lambda := \sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)\delta_\lambda \quad ;$$

alors on a :

$$\widehat{\mu_\Lambda} = \sum_{\lambda\in\Lambda^*_1} m'(\lambda)\delta_\lambda$$

Ce qui généralise le corollaire 2.2.1.

Remerciements

Je souhaiterais remercier chaleureusement toute l'équipe de théorie des groupes du laboratoire de mathématiques de Chevaleret pour leur accueil, en particulier Mme Monique Douchez et M. Loring Tu pour leur aide, et bien sur M. Paul Gérardin pour son encadrement, son soutien et sa patience à mon égard, qui m'ont assuré des conditions de travail optimales. Ce stage fut pour moi un premier contact avec le monde de la recherche et M. Gérardin a fait en sorte que je puisse en retirer le maximum. Je remercie également toute l'équipe de la bibliothèque recherche de Chevaleret pour leur disponibilité malgré des circonstances un peu particulières (déménagement) ainsi qu'Ophélie Rouby pour son soutien et son (inestimable) travail de relecture.

Annexe A

Rappels et compléments

Nous nous contenterons ici de rappeler quelques résultats classiques sans en donner de démonstration.

A.1 Analyse de Fourier

Commençons par rappeler la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

Définition A.1 (Espace de Schwartz)
On définit l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, comme l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ *;*

(ii) $\forall k \geq 0$, $f^{(k)}$ *est à décroissance rapide, i.e le produit des* $f^{(k)}$ *avec toute fonction polynôme est borné (avec la convention* $f^{(0)} = f$*).*

Définition A.2 (Polynôme de dérivation)
On appelle polynôme de dérivation toute application $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *de la forme :*

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ Q(f) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$

Où A est un ensemble fini de multi–indices et où les $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1. L'espace de Schwartz contient l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
2. L'espace de Schwartz est un sous–espace vectoriel de chaque espace L^p, pour $1 \leq p \leq \infty$.
3. L'espace de Schwartz est dense dans L^2.
4. On munit l'espace de Schwartz de la topologie suivante (cf. [Sch66]) : une suite $(\phi_n)_n \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}$ si et seulement si pour tout polynôme P et tout polynôme de dérivation Q, la suite $(P(Q * \phi_n))_n$ converge uniformément vers 0 dans $\mathbb{R}^d$.

On peut définir sur $\mathcal{S}$ la transformée de Fourier comme suit :

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \ \widehat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) e^{-2i\pi\langle x, \xi\rangle} dx$$

On a alors que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi}(\xi) e^{2i\pi\langle x, \xi\rangle} d\xi \tag{A.1}$$

On a alors que $\widehat{\widehat{f}} = f$.

Posons, pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{S}$, $\tau_a\phi : x \mapsto \phi(x-a)$. Alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\tau_a\phi}(\xi) = e^{-2i\pi\langle a, \xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi)$$

Proposition A.1 (Formule sommatoire de Poisson)
Soit $f \in \mathcal{S}$ et soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathbb{R}^d$. Alors :

$$\sum_{n\in\mathcal{R}} f(n) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathcal{R})} \sum_{n\in\mathcal{R}^*} \widehat{f}(n)$$

A.2 Mesures de Radon

De nombreux détails et les démonstrations relatives à ce paragraphe peuvent être trouvées dans [God03].

Définition A.3 (Mesure sur $\mathbb{R}^d$)
On appelle mesure (complexe) sur $\mathbb{R}^d$ toute application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vérifiant que :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) pour toute famille dénombrable $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de boréliens deux à deux disjoints, tels que leur réunion soit bornée, on a, avec convergence absolue du terme de droite, que :

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$$

On définit ensuite *l'intégrale selon μ* d'une application f appartenant à l'ensemble $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ de la façon usuelle et on pose :

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$$

Cet abus de notation sera justifié au paragraphe A.3.

Définition A.4 (Mesure positive)
Une mesure μ est dite positive si pour toute fonction f positive, on a $\mu(f) \geq 0$.

Définition A.5 (Mesure de Radon)
On appelle mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ toute mesure vérifiant que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$ il existe une constante $a_K > 0$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{K} \text{ telle que } \mathrm{supp}(f) \subset K,\ |\mu(f)| \leq a_K \|f\|_\infty$$

Proposition A.2
Soit μ une mesure de Radon. Alors il existe une mesure de Radon positive minimale[1] *ρ telle que :*

$$\forall f \in \mathcal{K},\ |\mu(f)| \leq \rho(|f|).$$

Par la suite, on notera $\rho = |\mu|$. La définition de $|\mu|$ se réécrit de la façon suivante en terme d'intégrales :

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \left|\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| d|\mu|$$

Définition A.6 (Mesure bornée)
Une mesure μ est dite bornée si $|\mu|(\mathbb{R}^d)$ est fini.

Exemple : Un exemple classique de mesures bornées est fourni par les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, dont font partie les lois de vecteurs aléatoires d–dimensionnels.

Munissons à présent l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^d$ d'une topologie adaptée à nos besoins, appelée *topologie vague* et définie par la convergence suivante :

Définition A.7 (Convergence vague)
On dit qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n$ converge vaguement vers une mesure μ si :

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f)$$

[1] Au sens suivant : si ν est une autre mesure positive vérifiant la propriété, on a que pour toute fonction $f \in \mathcal{K}$, $\nu(|f|) \leq \rho(|f|)$.

Une réécriture de cette convergence en terme d'intégrales donne :

$$\forall f \in \mathcal{K}, \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$$

Introduisons à présent quelques notations dans le but de rendre plus lisibles les propositions qui vont suivre : si f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, on définit, pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\check{f}(x) := f(-x)$ et on pose $\tilde{f} = \overline{\check{f}}$. Similairement, si μ est une mesure de Radon, on définit les mesures $\check{\mu} : f \mapsto \mu(\check{f})$, $\overline{\mu} : f \mapsto \mu(\overline{f})$ et $\tilde{\mu} = \overline{\check{\mu}}$.

Définition A.8 (Support d'une mesure)
Soit μ une mesure. On définit le support de μ comme le complémentaire $\operatorname{supp}(\mu)$ *du plus grand ouvert sur lequel (i.e la réunion des ouverts sur lesquels) μ est nulle.*

Ainsi, le support d'une mesure est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^d$ tels que μ ne soit nulle sur aucun voisinage ouvert de ces points, et réciproquement. On dira qu'une mesure μ est à support compact si $\operatorname{supp}(\mu)$ est compact.

Proposition A.3 (Produit de convolution)
Soient μ et ν deux mesures telles que l'une au moins soit à support compact. On peut alors définir une nouvelle mesure de Radon, appelée produit de convulotion de μ et ν et notée $\mu * \nu$, définie par :

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \mu * \nu(f) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x+y) d\mu(x) d\nu(y)$$

Lemme A.1
Soient μ et ν deux mesures de Radon et soit $f \in \mathcal{K}$ une fonction positive sur $\mathbb{R}^d$. Alors :

$$|\mu * \nu|(f) \leq |\mu| * |\nu|(f)$$

Définition A.9 (Volume d'un réseau)
Soit $\mathcal{R}$ un réseau. On appelle volume de $\mathcal{R}$ le nombre réel positif défini par :

$$\operatorname{vol}(\mathcal{R}) := \mu\left(\mathbb{R}^d/\mathcal{R}\right)$$

Où μ est la mesure quotient définie comme suit (on rappelle qu'il y a existence et unicité dans notre cas) :

$$\forall f \in \mathcal{K}, \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d/\mathcal{R}} \left(\int_{\mathcal{R}} f(x+r) d\mu_{\mathcal{R}}(r) \right) d\mu(x)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall f \in \mathcal{K}, \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d/\mathcal{R}} \left(\sum_{r \in \mathcal{R}} f(x+r) \right) d\mu(x)$$

Notons de plus que si $v_1 \dots v_n$ est une base du réseau $\mathcal{R}$, alors on a :

$$\operatorname{vol}(\mathcal{R}) = |\det(v_1 \dots v_n)|$$

A.3 Distributions

De nombreux détails et les démonstrations relatives à ce paragraphe peuvent être trouvées dans [Sch66].

Définition A.10 (Distribution)
Une distribution est une application $T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) T est $\mathbb{C}$–linéaire ;

(ii) T est continue au sens suivant : si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à supports contenus dans un compact K indépendant de n convergeant uniformément, ainsi que leurs dérivées, sur $\mathbb{R}^d$ vers 0, alors la suite $(T(\phi_n))_n$ converge vers 0.

Remarque : Si T est une distribution, on notera souvent, pour $\phi \in \mathcal{K}$, $\langle T, \phi \rangle := T(\phi)$.

Exemple : Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Alors on peut définir une distribution T_μ comme vu précédemment :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \langle T_\mu, f \rangle := \mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$$

T_μ est bien linéaire et continue au sens des distributions car si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à supports contenus dans un compact K indépendant de n convergeant uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers 0, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|\langle T_\mu, \phi_n \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n d\mu \right| \\
&= \left| \int_K \phi_n d\mu \right| \\
&\leq a_K \sup_K |\phi_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

Comme vu au paragraphe A.2, on confondra allègrement dans la suite une mesure et la distribution qu'elle induit via l'intégrale.

Définition A.11 (Distribution tempérée)
Une distribution est dite tempérée si on peut l'étendre en une application $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linéaire et continue au sens suivant : si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ convergeant dans $\mathcal{S}$ vers 0, alors la suite $(T(\phi_n))_n$ converge vers 0.

On dira par la suite qu'une mesure est tempérée si la distribution qu'elle induit l'est.

Exemples :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Alors la distribution induite par δ_x est tempérée. En effet, si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ convergeant dans $\mathcal{S}$ vers 0, alors $\forall n \geq 0$, on a :

$$\langle \delta_x, \phi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n d\delta_x = \phi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

2. Plus généralement, si Λ est un ensemble de Delone, sa densité $\mu_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure tempérée.

Proposition A.4 (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée)
Soit T une distribution tempérée. On définit alors sa transformée de Fourier $\widehat{T}$ de la façon suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle$$

$\widehat{T}$ est alors une distribution tempérée.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{S}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\delta_x}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi} d\delta_x \\
&= \widehat{\phi}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi) e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} d\xi
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widehat{\delta_x} = e^{-2i\pi \langle x, . \rangle} \lambda \tag{A.2}$$

Proposition A.5
Soient μ et ν deux mesures tempérées bornées. Alors :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \widehat{\mu * \nu}(f) = \widehat{\mu}(f) \widehat{\nu}(f)$$

Définissons la distribution :

$$\delta^{\mathbb{Z}} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

Alors, si $f \in \mathcal{S}$, d'après la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

i.e :

$$\langle \delta^{\mathbb{Z}}, f\rangle = \langle \delta^{\mathbb{Z}}, \widehat{f}\rangle$$

Ainsi $\delta^{\mathbb{Z}} = \widehat{\delta^{\mathbb{Z}}}$. Plus généralement, si $\mathcal{R} = \langle v_1 \dots v_d\rangle_{\mathbb{Z}}$ est un réseau, on note $\mu_{\mathcal{R}}$ la distribution :

$$\delta_{\mathcal{R}} := \sum_{z\in\mathcal{R}} \delta_z$$

Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_{\mathcal{R}}}(f) &= \sum_{z\in\mathcal{R}} \widehat{f}(z) \\
&= \frac{1}{\operatorname{vol}\mathcal{R}} \sum_{z\in\mathcal{R}^*} f(z) \\
&= \frac{1}{\operatorname{vol}\mathcal{R}} \mu_{\mathcal{R}^*}(f)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\widehat{\mu_{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\operatorname{vol}\mathcal{R}} \mu_{\mathcal{R}^*} \tag{A.3}$$

Bibliographie

[Ber98] Guillaume Bernuau. *Propriétés spectrales et géométriques des quasicristaux : ondelettes adaptées à un quasicristal.* PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1998.

[Bou63] Nicolas Bourbaki. *Livre VI : Intégration (chapitre 8).* Éléments de Mathématiques. Hermann, 1963.

[Bou65] Nicolas Bourbaki. *Livre III : Topologie générale (chapitre 1).* Éléments de Mathématiques. Hermann, 1965.

[BT87] Enrico Bombieri and Jean E. Taylor. Quasicrystals tilings and algebraic numbers theory : Some preliminary connections. *Contemporary Mathematics*, 64, 1987.

[Cor68] C. Corduneanu. *Almost Periodic Functions.* John Wiley and Sons, 1968.

[CT87] John W. Cahn and Jean E. Taylor. An introduction to quasicrystals. *Contemporary Mathematics*, 64, 1987.

[God03] Roger Godement. *Analyse mathématique IV.* Springer-Verlag, 2003.

[HL58] C. Hémery and C. Lebossé. *Géométrie.* Fernand Nathan, 1958.

[Kat97] André Katz. Introduction aux quasicristaux. *Séminaire Nicolas Bourbaki*, 838, 1997.

[Lag96] Jeffrey C. Lagarias. Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets. *Communications in Mathematical Physics*, 179, 1996.

[Lag99] Jeffrey C. Lagarias. Geometric models for quasicrystals. i. delone sets of finite type. *Discrete and Computational Geometry*, 21, 1999.

[Lag00] Jeffrey C. Lagarias. Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. *Centre de Recherches Mathématiques Monograph Series*, 13, 2000.

[Mey72] Yves Meyer. *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis.* North Holland Publishing Company, 1972.

[Mey95] Yves Meyer. *Quasicrystals, Diophantine Approximation and Algebraic Numbers. In : Beyond Quasicrystals (F. Axel and D. Gratias -editors-).* Les Editions de Physique / Springer, 1995.

[Moo97] R. V. Moody. *Meyer Sets and their Duals. In : The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order (R. V. Moody -editor-).* Dordrecht Kluwer, 1997.

[Rad94] Charles Radin. The pinwheel tiling of the plane. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 139, 1994.

[SBGC84] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*, 53, 1984.

[Sch66] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.

[Sen95] Marjorie Senechal. *Quasicrystals and Geometry.* Cambridge University Press, 1995.

[Sen97] Marjorie Senechal. *A Critique of the Projection Method. In : The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order (R. V. Moody -editor-).* Dordrecht Kluwer, 1997.

Table des figures

Index