Fonctions de Green dynamiques sur certaines variétés de caractères

Arnaud GIRAND [*]

Mémoire de Master 2 [†]

Résumé

On s'intéresse dans le présent mémoire à l'étude de la dynamique de certains automorphismes définis sur une famille de surfaces cubiques affines. Après avoir construit ces surfaces comme variétés de caractères, on cherche à décrire le comportement des orbites non bornées sous l'action d'automorphismes ayant une dynamique intéressante. Enfin, on donne une application des outils ainsi développés à l'étude d'opérateurs de Schrödinger ergodiques discrets.

Document mis à jour le 23 septembre 2013.

Table des matières

[*] arnaud.girand@univ-rennes1.fr

[†] Le présent document a été élaboré durant un stage effectué par l'auteur à l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR), de mars à juin 2013, sous la direction de Serge CANTAT et Frank LORAY sous tutelle de l'École Normale Supérieure de Cachan et de l'université de Rennes 1.

Introduction

Variétés de caractères. On commence par considérer la variété des représentations (du groupe fondamental) de la sphère privée de quatre points $\mathbb{S}^2_4$:

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4) \ := \ \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4, z_0), SL_2(\mathbb{C})).$$

Comme le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^2_4, z_0)$ est isomorphe au groupe libre à trois générateurs $\mathbf{F}_3$, on a une bijection :

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4) \ \cong \ SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})\,;$$

on peut alors s'intéresser au quotient algébrique de $\mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4)$ sous l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ par conjugaison. Ce quotient $\chi(\mathbb{S}^2_4)$ se réalise comme une sous–variété de $\mathbb{C}^7 \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, A, B, C, D])$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + Ax + By + Cz + D.$$

En fixant les paramètres A, B, C et D, on se ramène à l'étude d'une famille de surfaces cubiques $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ de $\mathbb{C}^3$.

Trois involutions. L'équation définissant la surface $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ étant de degré 2 en chacune des variables x, y et z, on peut définir — en associant à chaque point son conjugué — trois involutions s_x, s_y et s_z de $\mathcal{S}$; par exemple, s_x est donnée par la formule :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{S}, \quad s_x(x, y, z) = (A + yz - x, y, z).$$

Le sous–groupe $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ engendré par ces trois involutions est isomorphe au produit libre :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dans le cas de la surface $\mathcal{S}_C := \mathcal{S}_{(0,0,0,4)}$, on a un revêtement double ramifié :

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\to \mathcal{S}_C \\ (u, v) &\mapsto \left(u + \frac{1}{u}, v + \frac{1}{v}, uv + \frac{1}{uv}\right). \end{aligned}$$

Comme $GL_2(\mathbb{Z})$ agit monomialement sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et que $\eta(u^{-1}, v^{-1}) = \eta(u, v)$ on obtient une action de $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur la surface $\mathcal{S}_C$. Dans ce paradigme, les involutions s_x, s_y et s_z sur $\mathcal{S}_C$ correspondent aux matrices :

$$R_x := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } R_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

ce qui nous permet d'associer à chaque élément $f \in \mathcal{A}$ une matrice $M_f \in PGL_2(\mathbb{Z})$ de la façon suivante : si f s'écrit comme un mot $w(s_x, s_y, s_z)$ en les involutions s_x, s_y et s_z de $\mathcal{S}$, on lui associe la matrice $M_f := w(R_x, R_y, R_z)$. Par déformation continue, chaque mot $w(s_x, s_y, s_z)$ nous livre une famille d'automorphismes sur la famille des surfaces $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$.

Dans la suite, on s'intéressera aux automorphismes hyperboliques de $\mathcal{S}$, à savoir ceux vérifiant l'une des conditions suivantes :

- $\det(M_f) = 1$ et $|\mathrm{Tr}(M_f)| > 2$;
- $\det(M_f) = -1$ et $\mathrm{Tr}(M_f) \neq 0$.

En effet, si M_f ne vérifie pas l'une de ces conditions, sa dynamique est moins riche : on peut montrer (cf. [CL09]) qu'alors f est conjugué soit à s_x, s_y ou s_z — et donc d'ordre fini —, soit à une puissance de $s_x \circ s_y, s_y \circ s_z, \ldots$ et donc préserve une fibration de $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ en courbes rationnelles — par exemple $z = cst$ pour $s_x \circ s_y$ —.

Dynamique à l'infini. Pour tout choix du quadruplet $(A, B, C, D) \in \mathbb{C}^4$, la surface $\mathcal{S}$ se plonge dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ comme une cubique $\overline{\mathcal{S}}$ dont l'intersection avec le plan à l'infini $\mathbb{P}^2_\infty$ est exactement le "triangle" Δ d'équation :

$$(\Delta) \qquad xyz = 0.$$

On a alors une injection naturelle :

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathrm{Bir}(\overline{\mathcal{S}}),$$

où $\mathrm{Bir}(\overline{\mathcal{S}})$ désigne l'ensemble des applications birationnelles du compactifié $\overline{\mathcal{S}}$.

On fixe ensuite un élément hyperbolique $f \in \mathcal{A}$; quitte à remplacer f par l'itérée f^2, le spectre de la matrice M_f est de la forme $\left\{\lambda, \dfrac{1}{\lambda}\right\}$ avec $\lambda > 1$. On montre alors que f (resp. f^{-1}) admet un unique point d'indétermination v_- (resp. v_+). On souhaite estimer la croissance à l'infini de la quantité :

$$\frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\|, \text{ pour } m \in \mathcal{S}.$$

Si m a une orbite positive bornée sous f, on a :

$$\frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad ;$$

dans le cas contraire, on a le résultat suivant (cf. [Can09]) : quitte à conjuguer f, cette application est bien définie en l'unique point d'indétermination v_+ de son inverse et $f^n(m)$ tend à l'infini vers ce point. Un résultat dû à Dloussky nous permet alors de prouver que la dynamique de $f^n(m)$ est conjuguée à l'action monomiale d'un élément $N_f \in PGL_2(\mathbb{Z})$ à coefficients positifs au voisinage de l'origine. De plus, N_f est conjugué à la matrice M_f dans $PGL_2(\mathbb{Z})$.

On s'intéresse ensuite à la fonction de Green dynamique associée à l'automorphisme f :

$$G_f^+ : m \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\|.$$

Le premier but de ce mémoire est de prouver le résultat suivant.

Théorème A.
La fonction G_f^+ est bien définie et vérifie les propriétés suivantes :

(i) la fonction G_f^+ est pluri–sous–harmonique (psh) et localement höldérienne sur la surface $\mathcal{S}$;

(ii) l'ensemble des zéros de G_f^+ est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ à orbite positive bornée ;

(iii) quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $v_+ = [0 : 0 : 1 : 0]$; on a alors l'équivalent suivant :

$$G_f^+(m) \sim_{m\to v_+} -\alpha \log|X| - \beta \log|Y| \tag{1}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépendent que de f et :

$$X := \frac{x}{z} \quad \textit{et} \quad Y := \frac{y}{z}.$$

Équation de Schrödinger discrète. On commence par définir une application V sur le cercle $\mathbb{S}^1$:

$$V(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \theta > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour $\theta \in (-\pi, \pi]$. Fixons ensuite un nombre irrationnel $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et notons Rot_ϑ la rotation d'angle $2\pi\vartheta$ sur le cercle $\mathbb{S}^1$. On définit alors, pour $w \in \mathbb{S}^1$ et $\kappa \in \mathbb{R}$ le potentiel :

$$\begin{aligned} v_w : \mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto V(\mathrm{Rot}_\vartheta^n(w)), \end{aligned}$$

et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger discret suivant, pour $w \in \mathbb{S}^1$:

$$\begin{aligned} H_{\kappa,w} : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \xi &\mapsto (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} + \kappa v_w(n)\xi_n)_n. \end{aligned}$$

Le spectre $\Sigma_{\kappa,w}$ de cet opérateur vérifie le résultat suivant, dû à Pastur et provenant de l'ergodicité de la rotation Rot_ϑ.

Théorème (Pastur, 1980)**.**
Il existe un compact $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}$ tel que, pour Lebesgue–presque tout w :

$$\Sigma_{\kappa,w} = \Sigma_\kappa.$$

Pour étudier ce spectre presque–sûr Σ_κ, on est amené à estimer — pour $E \in \mathbb{C}$ — la croissance de la norme des itérées de la matrice suivante, qui apparaît naturellement dans l'équation aux éléments propres de l'opérateur $H_{\kappa,w}$:

$$M^E_{n,\kappa,w} := \begin{pmatrix} E - \kappa v_w(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

pour ce faire, on considère l'exposant de Lyapounov :

$$\gamma_\kappa(E) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left\| \prod_{n=0}^{N} M^E_{n,\kappa,w} \right\|,$$

qui, d'après le théorème d'Osseledets, existe et est constant égal à :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{S}^1} \log \left\| \prod_{n=0}^{N} M^E_{n,\kappa,w} \right\| dw$$

pour presque tout $w \in \mathbb{S}^1$.

Avant de poursuivre, rappelons la définition suivante (cf. [Kli91]).

Définition (Fonction de Green d'un domaine de $\mathbb{C}$)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus U$ soit compact. On appelle fonction de Green de U toute fonction $g_U : U \to (0, \infty)$ telle que :

(i) g_U est harmonique ;

(ii) la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{z\to\infty} (g_U(z) - \log|z|);$$

(iii) pour tout $\xi \in \partial U$, on a :

$$\lim_{z\to\xi} g_U(z) = 0.$$

On peut de plus montrer le lemme suivant :

Lemme.
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus U$ soit compact. Alors si U admet une fonction de Green, elle est unique.

On montre alors la proposition qui suit en utilisant la formule de Thouless, un résultat dû à Avron et Simon ainsi qu'un théorème de Damanik.

Proposition.
L'exposant de Lyapounov γ_κ est la fonction de Green du domaine $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa$.

Notons que l'on peut reformuler ce résultat comme suit : pour Lebesgue–presque tout $w \in \mathbb{S}^1$, la fonction :

$$E \mapsto \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left\| \prod_{n=0}^{N} M^E_{n,\kappa,w} \right\|$$

est la fonction de Green du domaine $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\kappa,w}$.

Lien à la dynamique. Considérons à présent la courbe de $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$ paramétrée comme suit :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{C} &\to \mathcal{S}_{4+\kappa^2} \\ E &\mapsto (E-\kappa, E, E(E-\kappa) - 2), \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$ est la cubique d'équation :

$$(\mathcal{S}_{4+\kappa^2}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4 + \kappa^2.$$

On fait alors usage d'un résultat par Damanik (cf. [Dam00]) établissant que pour certains entiers quadratiques ϑ il existe un automorphisme hyperbolique f de $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$ tel que le spectre presque sûr Σ_κ soit la pré–image par s de l'ensemble des points à orbite positive bornée sous f pour montrer notre second théorème.

Théorème B.
Soit $E \in \mathbb{C}$. Alors on a :
$$\gamma_\kappa(E) = \frac{1}{\alpha+\beta} G_f^+(s(E)),$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de f.

1 Variétés de caractères, cubique de Cayley

1.1 Trois exemples

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux variétés des caractères de trois surfaces affines : le tore $\mathbb{T}^2$, que nous utiliserons pour détailler les idées essentielles de notre démarche, et deux surfaces épointées : la sphère privée de quatre points et le tore privé d'un point. Avant de commencer, remarquons que si l'on considère un groupe Γ de type fini, on peut s'intéresser à son ensemble des représentations :
$$\mathrm{Rep}(\Gamma) := \mathrm{Hom}(\Gamma, SL_2).$$
Considérons une présentation de notre groupe :
$$\Gamma = \langle a_1, \ldots, a_k \,|\, (R_n(a_1, \ldots, a_k))_{n \geq 0} \rangle \quad ;$$
alors $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ s'injecte dans SL_2^k comme l'ensemble suivant :
$$\{(A_1, \ldots, A_k) \in SL_2^k \,|\, \forall n \geq 0,\, R_n(A_1, \ldots, A_k) = I_2\}.$$
Comme les équations $R_n(A_1, \ldots, A_k) = I_2$ sont polynomiales à coefficient entiers, le théorème des zéros de Hilbert affirme que l'ensemble $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ est en fait une sous–variété de SL_2^k quelque soit le corps de base. En particulier, $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ est naturellement muni lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$ de deux topologies : celle induite par la topologie produit sur $SL_2(\mathbb{C})^k$ et la topologie de Zariski.

Une conséquence de cette description en termes de variétés algébriques est que l'on peut considérer le quotient algébrique :
$$\chi := \mathrm{Rep}(\Gamma)//SL_2$$
de $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ sou l'action de SL_2 par conjugaison (simultanée). Il s'agit par définition de la variété algébrique :
$$\chi = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(\Gamma)]^{SL_2}),$$
où $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(\Gamma)]^{SL_2}$ est l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ invariantes sous l'action de SL_2 ; on peut montrer qu'il s'agit dans le cas complexe du plus petit quotient séparé — au sens de la topologie induite — du quotient topologique $\mathrm{Rep}(\Gamma)/SL_2(\mathbb{C})$.

Le tore $\mathbb{T}^2$. On considère le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et on fixe un point de base $z_0 \in \mathbb{T}^2$. Le groupe fondamental du tore basé en z_0 est alors isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

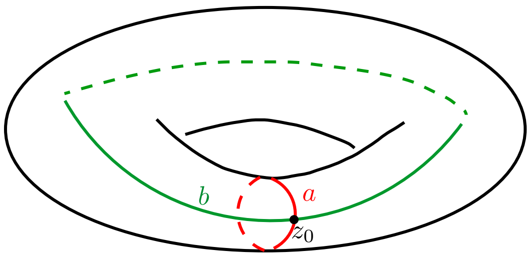

FIGURE 1 – Groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^2$.

On s'intéresse à la variété des représentations de $\mathbb{T}^2$, soit :
$$\mathrm{Rep}(\mathbb{T}^2) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{T}^2, z_0), SL_2(\mathbb{C})).$$
Si on fixe deux générateurs a et b de $\pi_1(\mathbb{T}^2, z_0)$, par exemple les deux lacets élémentaires de la figure 1, un élément ρ de $\mathrm{Rep}(\mathbb{T}^2)$ est entièrement déterminé par deux éléments A et B de $SL_2(\mathbb{C})$,

à savoir $A := \rho(a)$ et $B := \rho(b)$, tels que $[A, B] = I_2$. Réciproquement, deux telles matrices nous donnent bien un morphisme de $\pi_1(\mathbb{T}^2, z_0)$ dans $SL_2(\mathbb{C})$ et donc on a une bijection :

$$\operatorname{Rep}(\mathbb{T}^2) \cong \{(A, B) \in SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \,|\, [A, B] = I_2\}.$$

Pour étudier l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ par conjugaison, on fait usage du lemme ci–après.

Lemme 1.1.
Chaque classe de conjugaison de $\{(A, B) \in SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \,|\, [A, B] = I_2\}$ sous $SL_2(\mathbb{C})$ contient un couple (A, B) de l'un des types suivants :

(i)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ uniquement déterminés par la classe de conjugaison modulo la relation d'équivalence $(\lambda, \mu) \sim (\lambda^{-1}, \mu^{-1})$.

(ii)

$$A = \eta \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $[r : s] \in \mathbb{P}^1$ et $\eta, \varepsilon \in \{-1, 1\}$ uniquement déterminés par la classe de conjugaison.

Démonstration : Soit $(A, B) \in SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ tel que A et B commutent. Si A et B sont diagonalisables, elles sont co–diagonalisables et donc (A, B) est conjugué à un couple de matrices du type (i) (car $\det(A) = \det(B) = 1$) pour un certain paramètre $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. On conclut ce premier cas en remarquant que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

conjugue

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{à} \quad \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si au moins l'une des deux matrices, disons A, n'est pas diagonalisable alors le couple (A, B) reste co–trigonalisable car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Remarquons également que la seule valeur propre possible pour A est ± 1 avec multiplicité 2 (sinon A aurait deux valeurs propres distinctes λ et λ^{-1} sur $\mathbb{C}$ car $\det(A) = 1$). Ainsi on peut conjuguer comme suit, pour $r, s \in \mathbb{C}$, $\eta \in \{-1, 1\}$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$:

$$A \sim \eta \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} \mu & s \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}.$$

La condition $AB = BA$ impose alors que $(1 - 1)s = (\mu - \mu^{-1})r$ et donc $\mu = \pm 1$ car A n'est pas diagonalisable. De plus, on peut multiplier r et s par une même constante $c \in \mathbb{C}^*$ en conjuguant (A, B) par la matrice $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}$, où $u^2 = c$.

$\square$

On souhaite calculer le quotient algébrique de $\operatorname{Rep}(\mathbb{T}^2)$ par l'action de $SL_2(\mathbb{C})$:

$$\chi(\mathbb{T}^2) := \operatorname{Rep}(\mathbb{T}^2) // SL_2(\mathbb{C}),$$

appelé variété des caractères du tore $\mathbb{T}^2$.

Commençons par remarquer que ce quotient se doit d'identifier toutes les classes de type (ii) ; en effet si on considère deux suites $(\lambda_n)_n$ et $(\mu_n)_n$ convergeant vers 1 dans $\mathbb{C}^*$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n, \mu_n \neq \pm 1$ et si on fixe $[r : s] \in \mathbb{P}^1$ alors on a :

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_n & r \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_n & s \\ 0 & \mu_n^{-1} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})} \left(\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Mais on a également, pour tout $n \geq 0$:

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_n & r \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_n & s \\ 0 & \mu_n^{-1} \end{pmatrix} \right) \text{ conjugué à } \left(\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_n & 0 \\ 0 & \mu_n^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

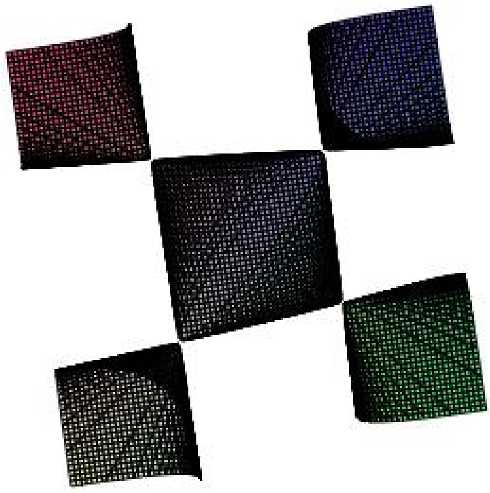

Figure 2 – Cubique de Cayley (partie réelle).

et

$$\left(\begin{pmatrix}\lambda_n & 0\\ 0 & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mu_n & 0\\ 0 & \mu_n^{-1}\end{pmatrix}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{SL_2(\mathbb{C})\times SL_2(\mathbb{C})}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Donc les classes de type (ii) ne sont pas séparées des classes de $(I_2, I_2), (I_2, -I_2), (-I_2, I_2)$ et $(-I_2, -I_2)$. En ce qui concerne les classes de type (i), on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.
Les fonctions polynomiales de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ invariantes par la relation $(\lambda, \mu) \sim (\lambda^{-1}, \mu^{-1})$ sont exactement les éléments de l'anneau :

$$\mathbb{C}[\lambda + \lambda^{-1}, \mu + \mu^{-1}, \lambda\mu + (\lambda\mu)^{-1}].$$

Démonstration : Soit :

$$P(\lambda, \mu) := \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} p_{a,b}\lambda^a\mu^b$$

un tel polynôme. Comme $P(\lambda, \mu) = P(\lambda^{-1}, \mu^{-1})$, on a $p_{-a,-b} = p_{a,b}$ et donc :

$$P(\lambda, \mu) := \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} p_{a,b}(\lambda^a\mu^b + \lambda^{-a}\mu^{-b}) \;+\; p_{0,0}.$$

On montre alors par récurrence que $\lambda^a\mu^b + \lambda^{-a}\mu^{-b}$ est un polynôme en $\lambda + \lambda^{-1}, \mu + \mu^{-1}$, et $\lambda\mu + (\lambda\mu)^{-1}$, d'où le résultat.

□

Le quotient algébrique est donc donné par l'application suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*/\sim\; &\to \mathbb{C}^3\\ (\lambda, \mu) &\mapsto (\lambda + \lambda^{-1}, \mu + \mu^{-1}, \lambda\mu + \lambda^{-1}\mu^{-1}).\end{aligned}$$

Cette application réalise un plongement de $\chi(\mathbb{T}^2)$ dans $\mathbb{C}^3$ et son image est une cubique que l'on appellera cubique de Cayley, d'équation :

$$(\mathcal{S}_C) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4. \qquad (2)$$

Cette cubique possède quatre points singuliers, de coordonnées $(-2,-2,-2), (2,-2,2), (-2,2,2)$ et $(2,2-2)$. L'intersection de cette cubique avec $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{S}_C(\mathbb{R})$, privée de ces quatre points singuliers possède quatre composantes connexes non bornées, images par l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*/\sim \to \mathbb{C}^3$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*$, et une composante connexe bornée correspondant à l'image de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ (cf. figure 2).

La sphère $\mathbb{S}_4^2$. On s'intéresse à présent à la sphère $\mathbb{S}^2$ privée de quatre points. Si on fixe un point de base $z_0 \in \mathbb{S}_4^2$, le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}_4^2, z_0)$ est isomorphe au groupe libre $\mathbf{F}_3$ engendré, par exemple, par les trois lacets élémentaires α, β et γ de la figure 3.

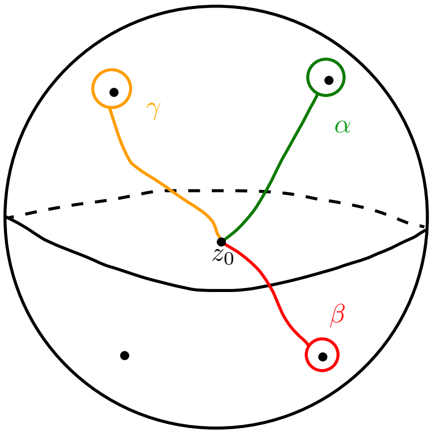

FIGURE 3 – Groupe fondamental de la sphère épointée $\mathbb{S}_4^2$.

On souhaite de nouveau étudier la variété des représentations de la sphère $\mathbb{S}_4^2$, soit :

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{S}_4^2, z_0), SL_2(\mathbb{C})).$$

Comme $\pi_1(\mathbb{S}_4^2, z_0), SL_2(\mathbb{C})$ est un groupe libre à trois générateurs, un élément $\rho \in \mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2)$ est totalement déterminé par les trois matrices $\rho(\alpha), \rho(\beta)$ et $\rho(\gamma)$. De ce fait on déduit une bijection :

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2) \cong SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}).$$

On peut donc faire agir $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2)$ par conjugaison et s'intéresser au quotient algébrique résultant de cette action, appelé variété des caractères de $\mathbb{S}_4^2$:

$$\chi(\mathbb{S}_4^2) := \mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2)//SL_2(\mathbb{C}).$$

On montre alors que ce quotient affine se calcule à l'aide de l'application suivante (cf. [BG99]) :

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{Rep}(\mathbb{S}_4^2) &\to \mathbb{C}^7 \\ \rho &\mapsto (a, b, c, d, x, y, z) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{gathered} a := \mathrm{Tr}(\rho(\alpha)), \quad b := \mathrm{Tr}(\rho(\beta)), \quad c := \mathrm{Tr}(\rho(\gamma)), \quad d := \mathrm{Tr}(\rho(\delta)) \\ x := \mathrm{Tr}(\rho(\alpha\beta)), \quad y := \mathrm{Tr}(\rho(\beta\gamma)), \quad z := -\mathrm{Tr}(\rho(\alpha\gamma)). \end{gathered}$$

avec $\delta = (\alpha\beta\gamma)^{-1}$. En suivant [BG99], on peut montrer que le quotient $\chi(\mathbb{S}_4^2)$ se réalise dans $\mathbb{C}^7$ comme la quartique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + Ax + By + Cz + D \tag{3}$$

où :

$$\begin{gathered} A := ab + cd, \quad B = bc + ad, \quad C = -(ac + bd) \\ D := 4 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - abcd. \end{gathered}$$

Si on fixe A, B, C et D dans l'équation 3, on obtient une surface cubique $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ de $\mathbb{C}^3$. On remarque alors que $\mathcal{S}_{(0,0,0,4)} = \mathcal{S}_C$ est la cubique de Cayley. Il s'agit de la seule surface de type $(\mathcal{S}_{(A,B,C,D)})$ possédant 4 points singuliers.

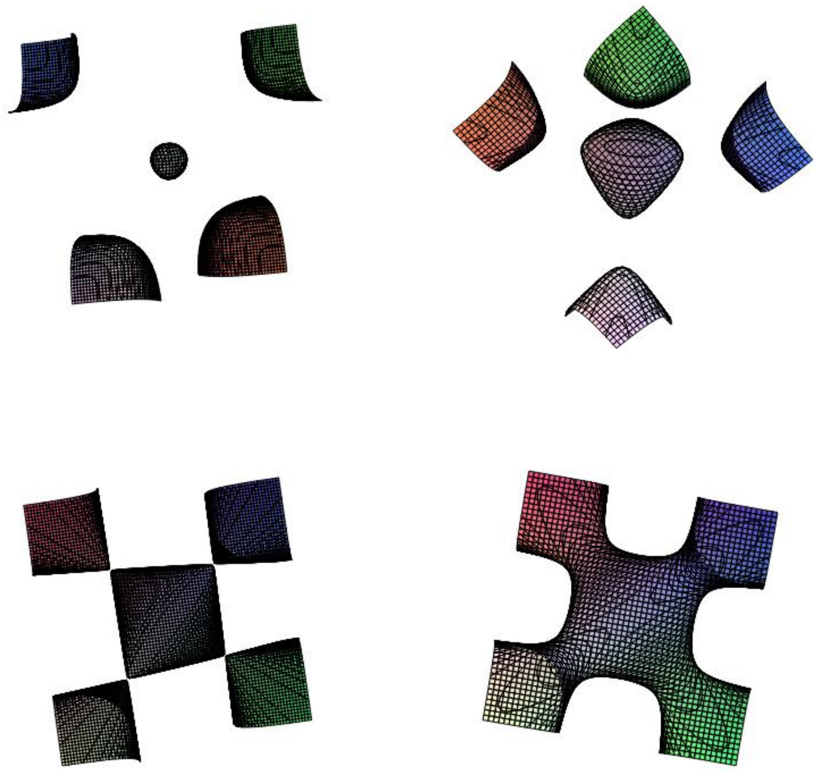

FIGURE 4 – Surfaces $\mathcal{S}_{(0,0,0,D)}$ pour $D = \frac{1}{2}$, $D = 3$, $D = 4$ et $D = 6$ (parties réelles).

Le tore $\mathbb{T}_1^2$. Le groupe fondamental du tore à un trou $\mathbb{T}_1^2 := \mathbb{T}_1^2 \setminus \{p_0\}$ est isomorphe au groupe libre $\mathbf{F}_2 := \langle a, b \,|\, \emptyset \rangle$. De fait, tout élément de sa variété des représentations

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{T}_1^2) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{T}_1^2, z_0), SL_2(\mathbb{C}))$$

est déterminé par l'image des deux lacets de base — correspondant aux générateurs a et b de $\mathbf{F}_2$ —, *i.e* :

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{T}_1^2) \cong SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}).$$

On peut donc considérer le quotient algébrique de $\mathrm{Rep}(\mathbb{T}_1^2)$ sous l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ par conjugaison, soit :

$$\chi(\mathbb{T}_1^2) := \mathrm{Rep}(\mathbb{T}_1^2)//SL_2(\mathbb{C}).$$

Les invariants sont alors, pour $\rho \in \mathrm{Rep}(\mathbb{T}_1^2)$, les polynômes en :

$$x := \mathrm{Tr}(\rho(a)), \quad y := \mathrm{Tr}(\rho(b)) \quad \text{et} \quad z := \mathrm{Tr}(\rho(ab)).$$

On peut alors montrer (cf. [BG99]) qu'il n'existe pas de relation entre les trois invariants ci–dessus et donc que :

$$\chi(\mathbb{T}_1^2) \cong \mathbb{C}^3,$$

et que si on impose la condition $\mathrm{Tr}([\rho(a), \rho(b)]) = D \in \mathbb{C}$, ce qui correspond à regarder une certaine hypersurface de $\chi(\mathbb{T}_1^2)$, on obtient un isomorphisme avec :

$$(\mathcal{S}_{(0,0,0,2+D)}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 2 + D.$$

1.2 Quelques actions de groupes

On se propose dans cette section de détailler quelques actions de groupes sur les cubiques $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ héritées de leur construction comme variétés de caractères.

Action par automorphismes. Le groupe $\mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ des automorphismes du groupe fondamental de la sphère $\mathbb{S}^2_4$ agit sur $\mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4)) &\to \mathrm{Aut}[\mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4)]\\ \Phi &\mapsto (\rho \mapsto \rho \circ \Phi^{-1}).\end{aligned}$$

Ceci nous livre une action par automorphismes de $\mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ sur le quotient $\chi(\mathbb{S}^2_4)$ — via $\chi(\rho) \mapsto \chi(\rho \circ \Phi^{-1})$ — et si $\sigma \in \mathrm{Inn}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ est un automorphisme intérieur, *i.e* la conjugaison par un élément $g \in \pi_1(\mathbb{S}^2_4)$, on a :

$$\forall \rho \in \mathrm{Rep}(\mathbb{S}^2_4), \quad \sigma \cdot \rho = \rho(g)^{-1}\rho(\cdot)\rho(g)$$

et donc $\mathrm{Inn}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ agit trivialement sur la variété de caractères $\chi(\mathbb{S}^2_4)$. On a de fait une action du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4)) := \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))/\mathrm{Inn}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4)) \cong \mathrm{Out}(\mathbf{F}_3)$ sur $\chi(\mathbb{S}^2_4)$.

Si $\Phi \in \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ alors l'application $\chi(\rho) \mapsto \chi(\rho \circ \Phi^{-1})$ est un automorphisme polynomial de $\chi(\mathbb{S}^2_4)$; en effet, χ est définie par la formule :

$$\chi(\rho) = (x, y, z, a, b, c, d)$$

avec a, b, c, d, x, y et z définis à l'aide de traces donc polynomiaux. *In fine*, notre action par automorphismes nous livre une application :

$$\mathrm{Out}(\mathbf{F}_3) \to \mathrm{Aut}[\chi(\mathbb{S}^2_4)].$$

Groupe modulaire. Commençons par rappeler la définition du groupe modulaire.

Définition 1.3 (Groupe modulaire étendu).
Soit M une variété différentielle. On appelle groupe modulaire (étendu) de M le groupe quotient, noté $\mathrm{Mod}^{\pm}(M)$, du groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes ($\mathcal{C}^\infty$) de M sur elle–même par le sous–groupe distingué formé des éléments isotopes à l'identité.

Exemple : le groupe modulaire du tore $\mathbb{T}^2$ et celui du tore "percé" $\mathbb{T}^2_1$ sont isomorphes à $GL_2(\mathbb{Z})$ (cf. [Sti93], p. 206).

Soit $p_0 \in \mathbb{S}^2_4$ et soit $h \in \mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4)$. Quitte à changer de représentant dans la classe d'isotopie de h, on peut supposer qu'il fixe le point p_0. On obtient alors un morphisme :

$$\begin{aligned}h_* : \pi_1(\mathbb{S}^2_4, p_0) &\to \pi_1(\mathbb{S}^2_4, p_0)\\ [\gamma] &\mapsto [h \circ \gamma]\end{aligned}$$

qui est en fait un isomorphisme avec $(h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. Cette construction nous livre une application :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4) &\to \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4, p_0))\\ [h] &\mapsto h_*\end{aligned}$$

où le représentant h est choisi de façon à fixer le point base p_0. Cette application est bien définie car les classes d'isotopie à gauche correspondent aux classes d'homotopie à droite ; en effet si h et h' sont deux représentants de la classe d'isotopie $[h]$ fixant le point de base de $\pi_1(\mathbb{S}^2_4)$ alors, par construction, il existe une isotopie :

$$\delta : [0, 1] \times \mathbb{S}^2_4 \to \mathbb{S}^2_4$$

entre h et h', à savoir une application continue telle que $\delta(0, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2_4}$ et $h' = h \circ \delta(1, \cdot)$. On a alors, si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2_4$ est un élément de $\pi_1(\mathbb{S}^2_4)$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad h' \circ \gamma(t) = h \circ \delta(1, \gamma(t)).$$

Or l'application $(s, t) \mapsto \delta(s, \gamma(t))$ est la composée d'une homotopie et d'une conjugaison — elle fait décrire un lacet au point base p_0 — dans $\mathbb{S}^2_4$ et donc le lacet γ est homotope à un conjugué de $\delta(1, \gamma(\cdot))$. Quitte à passer au quotient à droite on obtient donc une application :

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$$

qui est en fait un morphisme de groupes puisque changer de point de base revient à conjuguer par un lacet donné. En combinant ce résultat avec ceux du paragraphe précédent concernant l'action de $\mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{S}^2_4))$ sur la variété de caractères $\chi(\mathbb{S}^2_4)$, on obtient un nouveau morphisme :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4) &\to \mathrm{Aut}[\chi(\mathbb{S}^2_4)]\\ [h] &\mapsto (\chi(\rho) \mapsto \chi(\rho \circ h_*^{-1})).\end{aligned}$$

Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ via revêtement. On considère l'involution suivante du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2\\ (x, y) &\mapsto (-x, -y).\end{aligned}$$

Cette application possède quatre points fixes dont l'ensemble $H := \{(0,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ s'avère être exactement le sous–groupe des éléments de 2–torsion de $(\mathbb{T}^2, +)$.

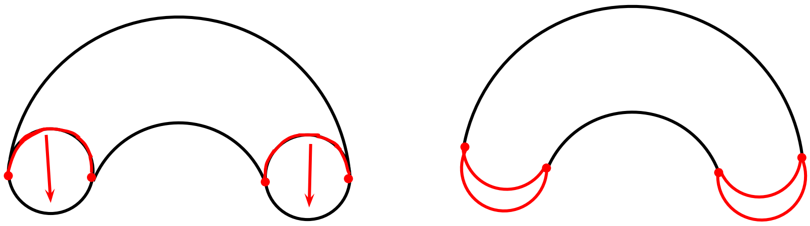

Figure 5 – Quotient de $\mathbb{T}^2$ sous l'action de σ.

Un domaine fondamental pour l'action de σ sur $\mathbb{T}^2$ est un "demi–tore" (cf. figure 5) sur lequel le passage au quotient se résume à l'identification de deux paires de demi–cercles. Ce quotient est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. On obtient ainsi un revêtement ramifié :

$$\pi_T : \mathbb{T}^2 \xrightarrow{2:1} \mathbb{S}^2$$

dont le lieu de ramification est H. Quitte à composer π_T par un difféomorphisme ad–hoc, on peut supposer que ce revêtement envoie ces quatre points sur les quatre "trous" de notre sphère $\mathbb{S}^2_4$, nous livrant ainsi un revêtement :

$$\pi_T : \mathbb{T}^2_4 \xrightarrow{2:1} \mathbb{S}^2_4.$$

Le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ agit sur le tore $\mathbb{T}^2$ par difféomorphismes linéaires en fixant $(0, 0)$ et en permutant les trois points $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; de fait cette action laisse invariant l'ensemble H des points de ramification de $\mathbb{T}^2$. On obtient ainsi une action de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{S}^2_4$ par passage au quotient car $GL_2(\mathbb{Z})$ commute avec σ. Comme $Z(GL_2(\mathbb{Z})) = \{I_2, -I_2\}$ est dans le noyau de cette dernière action, on a même une action de $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur la sphère $\mathbb{S}^2_4$ par difféomorphismes linéaires, soit un morphisme :

$$PGL_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{S}^2_4)$$

et donc, en passant au quotient à droite par isotopie :

$$PGL_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4).$$

Plus précisément, on a le résultat suivant (cf. [CL09]).

Lemme 1.4.
Le sous–groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{S}^2_4]$ *réalisé par l'action de* $PGL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{S}^2_4$ *via l'injection précédente est*

engendré par les trois applications suivantes :

$$\bullet\, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{soit} \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \\ d \mapsto d \end{cases} \quad \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto -z - xy + ac + bd \\ z \mapsto y \end{cases} ;$$

$$\bullet\, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{soit} \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto c \\ c \mapsto b \\ d \mapsto d \end{cases} \quad \begin{cases} x \mapsto z \\ y \mapsto y \\ z \mapsto -x - yz + ab + cd \end{cases} ;$$

$$\bullet\, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{soit} \begin{cases} a \mapsto c \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \\ d \mapsto d \end{cases} \quad \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto z \end{cases} .$$

Comme H est le sous–groupe des éléments de 2–torsion de $\mathbb{T}^2$, il agit sur le tore par translation ; le revêtement π_T nous livre alors une action de H sur la sphère percée $\mathbb{S}^2_4$ par difféomorphismes, soit une inclusion :

$$H \hookrightarrow \mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4).$$

Plus précisément, on trouve le résultat suivant dans [Bir74] :

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}^2_4) \cong PGL_2(\mathbb{Z}) \ltimes H.$$

Géométriquement, ce produit semi–direct s'apparente à la construction classique des groupes affines : on a un groupe agissant linéairement sur une variété — $PGL_2(\mathbb{Z})$ — combiné à un ensemble invariant agissant par translation.

2 Dynamique des éléments hyperboliques

2.1 Compactification et automorphismes

On s'intéresse de nouveau à la surface $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ donnée par l'équation suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + Ax + By + Cz + D, \tag{4}$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{C}$.Le compactifié de cette dernière est la surface $\overline{\mathcal{S}}$ de $\mathbb{P}^3$ donnée par l'équation :

$$w(x^2 + y^2 + z^2) = xyz + w^2(Ax + By + Cz) + w^3 D \tag{5}$$

en coordonnées homogènes $[x : y : z : w]$; la trace de la surface $\mathcal{S}$ à l'infini, *i.e* la courbe $\overline{\mathcal{S}} \cap \mathbb{P}^2_\infty$ où $\mathbb{P}^2_\infty$ est le plan de coordonnées $\{w = 0\}$, est donc le triangle à l'infini Δ d'équation :

$$xyz = 0. \tag{6}$$

Notons que cette composante à l'infini est indépendante des paramètres A, B, C et D. Un calcul montre de plus que les seules singularités du compactifié $\overline{\mathcal{S}}$ sont héritées de celles de la surface initiale $\mathcal{S}$; ainsi $\overline{\mathcal{S}}$ est régulière au voisinage du triangle Δ.

Le groupe $\mathcal{A}$. Si on fixe les paramètres y et z dans l'équation (4), on obtient une équation de degré 2 en x : de fait, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, soit il existe un unique point $x' \in \mathbb{C} \setminus \{x\}$ tel que $(x', y, z) \in \mathcal{S}$, soit x est racine double de l'équation. Dans tous les cas :

$$x' = A + yz - x$$

est tel que $(x', y, z) \in \mathcal{S}$. Géométriquement, x' est le troisième — avec multiplicité — point d'intersection entre $\overline{\mathcal{S}}$ et la droite passant par x et le point $[1 : 0 : 0 : 0] \in \Delta$. On peut définir par ce procédé trois involutions s_x, s_y et s_z de $\mathcal{S}$ et considérer le sous–groupe qu'elles engendrent dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$, soit :

$$\mathcal{A} := \langle s_x, s_y, s_z \rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{S}).$$

On peut montrer (cf. [CL09]) que ce sous–groupe est isomorphe au produit libre :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

De plus, il s'agit de la réalisation du sous–groupe

$$\Gamma_2^* := \{M \in PGL_2(\mathbb{Z}) \,|\, M \equiv I_2[2]\} \leq PGL_2(\mathbb{Z})$$

via l'injection $PGL_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Mod}^{\pm}(\mathbb{S}_4^2)$ décrite en 1.2 (cf. [CL09]). Ainsi, à tout automorphisme $f \in \mathcal{A}$ on associera un élément $M_f \in PGL_2(\mathbb{Z})$ qui nous permet de poser la définition suivante.

Définition 2.1 (Élément hyperbolique)**.**
Un élément $f \in \mathcal{A}$ est dit hyperbolique si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- $\det(M_f) = 1$ *et* $|\mathrm{Tr}(M_f)| > 2$ *;*
- $\det(M_f) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(M_f) \neq 0$.

Notons que dans le cas de la cubique de Cayley $\mathcal{S}_C$, la matrice M_f peut être obtenue à l'aide du revêtement double ramifié $(u, v) \mapsto (u + u^{-1}, v + v^{-1}, uv + (uv)^{-1})$ comme indiqué dans l'introduction.

Le groupe des automorphismes des surfaces $\mathcal{S}_{(0,0,0,D)}$ peut par ailleurs être décrit de façon explicite (cf [ÈH74]) : il est engendré par la famille composée de :
- toutes les permutations de coordonnées (isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$) ;
- les automorphismes $(x, y, z) \mapsto (-x + yz, y, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$.

De plus, le sous–groupe

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_{(0,0,0,D)})$.

2.2 Dynamique à l'infini

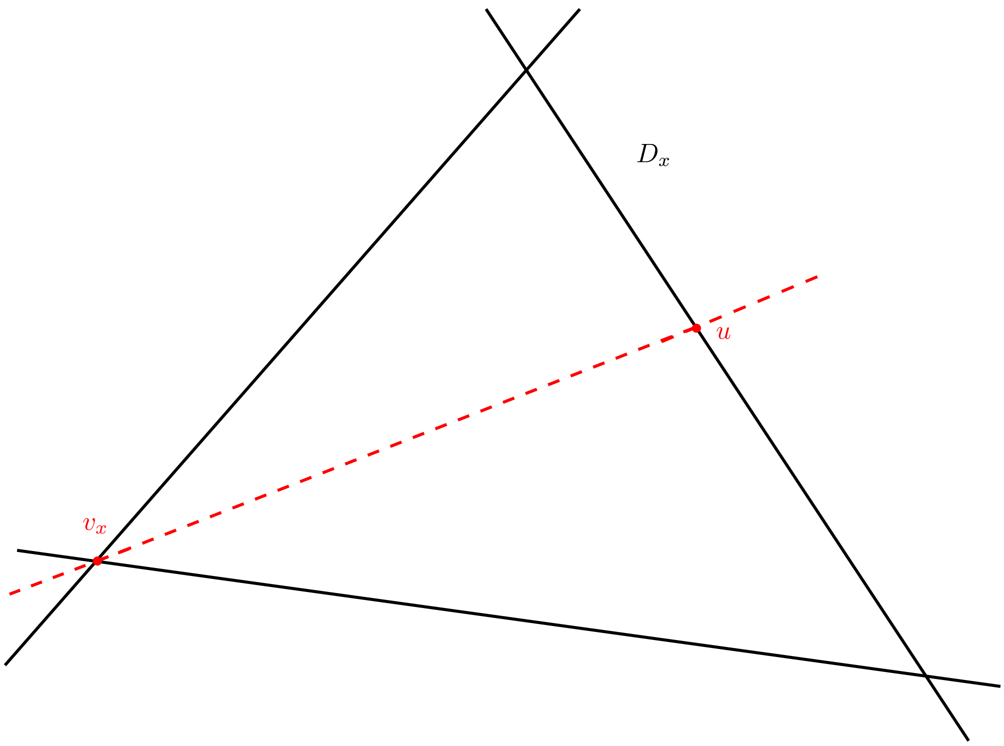

FIGURE 6 – Intersection de (v_x, u) avec $\overline{\mathcal{S}}$.

Le groupe $\mathcal{A}$ agit naturellement sur la surface projective $\overline{\mathcal{S}}$ par applications birationnelles ; tachons donc à présent de décrire la dynamique des éléments de $\mathcal{A}$ sur $\overline{\mathcal{S}} \cap \mathbb{P}^2_\infty = \Delta$, en commençant — par exemple — par l'involution s_x. Notons D_x (resp. D_y, D_z) la droite $\{x = 0\}$ (resp. $\{y = 0\}$,

$\{z=0\}$) en coordonnées homogènes $[x:y:z:w]$ choisies de telles sortes que $\mathbb{P}^2_\infty = \{w=0\}$ et v_x (resp. v_y, v_z) le point $[1:0:0:0]$ (resp. $[0:1:0:0]$, $[0:0:1:0]$). Si $u \in D_x \setminus \{v_y, v_z\}$ alors la droite passant par u et v_x intersecte la surface compactifiée $\overline{\mathcal{S}}$ en deux points : v_x — avec multiplicité 2 — et u — transversalement — (cf. figure 6). On constate, par construction géométrique de s_x, que $s_x(u) = v_x$ soit :

$$s_x(D_x \setminus \{v_y, v_z\}) = \{v_x\}.$$

Pour établir l'image de D_y et D_z on raisonne par prolongement : comme $\overline{\mathcal{S}}$ est lisse à l'infini l'involution s_x se prolonge analytiquement au voisinage de Δ dans cette surface. Or si u est un point "proche" de D_y (resp. D_z) alors la droite (v_x, u) intersecte $\overline{\mathcal{S}}$ en un point "proche" de D_y (resp. D_z). Un calcul montre ensuite que les points $m_y = [1:0:1:0] \in D_y$ et $m_z = [1:1:0:0] \in D_z$ sont fixes sous l'action de s_x. *In fine*, l'involution s_x (cf. figure 7) :

- contracte la droite D_x sur le sommet v_x ;
- laisse invariants les points m_y, m_z ainsi que les droites D_y et D_z.

Notons également que l'application s_x s'étend à $\mathbb{P}^3$ par la formule suivante :

$$s_x([x:y:z:w]) = [A + yz - xw : yw : zw : w^2]$$

qui permet d'avoir l'intuition de son action sur le triangle à l'infini ; elle contracte en effet le plan $\mathbb{P}^2_\infty$ privé du sommet v_x du triangle Δ sur ce dernier point.

Ainsi, pour réellement comprendre l'action de s_x, il est nécessaire d'éclater le sommet v_x. Une étude similaire pouvant être menée, avec des résultats analogues, pour les autres générateurs s_y et s_z, on se rend compte que pour comprendre la dynamique à l'infini du groupe $\mathcal{A}$ il nous faut éclater tous les sommets du triangle Δ. Mais un tel éclatement fait apparaître de nouveaux points d'indétermination pour chacun de ses générateurs : seule une suite infinie d'éclatements permettrait alors d'étudier "en finesse" la dynamique de $\mathcal{A}$.

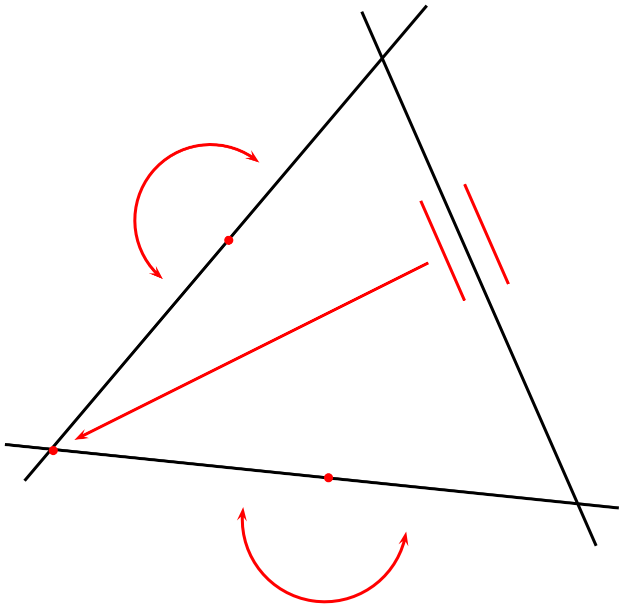

FIGURE 7 – Action de s_x sur le triangle Δ.

Points d'indétermination. Comme $f \in \mathcal{A}$ s'étend en une application birationnelle de la surface projective $\overline{\mathcal{S}}$, elle possède au plus un nombre fini de points d'indétermination. Plus précisément, on trouve dans [Can09, CL09] le résultat suivant.

Proposition 2.2.
Soit $f \in \mathcal{A}$ un élément hyperbolique. Alors :

(i) l'application f admet un unique point d'indétermination v_- dans $\overline{\mathcal{S}}$;

(ii) quitte à conjuguer f dans $\mathcal{A}$, on peut supposer que le point d'indétermination de f est distinct de celui, noté v_+, de son inverse f^{-1} ;

(iii) l'automorphisme f contracte le triangle épointé $\Delta \setminus \{v_-\}$ sur le point v_+.

Dans toute la suite, on supposera toujours que les éléments hyperboliques considérés séparent les points d'indétermination au sens du point (ii) de la proposition 2.2.

2.3 Bassins d'attraction

Soit f un élément hyperbolique de $\mathcal{A}$. On souhaite montrer que la quantité suivante est bien définie, pour m dans la surface $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log \|f^n(m)\|,$$

où $\lambda > 1$ est la valeur propre maximale de la matrice M_f et $\|.\|$ représente la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{C}^3$. Quitte à remplacer f par l'itérée f^2, on peut supposer que les valeurs propres de M_f sont exactement λ et $\dfrac{1}{\lambda}$.

Commençons par remarquer que si m a une orbite positive ($i.e$ pour $n \geq 0$) bornée, alors :

$$\frac{1}{\lambda^n} \log \|f^n(m)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme $f \in \mathcal{A}$, le point v_+ d'indétermination de f^{-1} est l'un des sommets du triangle à l'infini Δ et comme $m \in \mathcal{S}$, $f^n(m) \notin \Delta$ pour tout n. En particulier, l'orbite positive de m sous f ne visite jamais les deux côtés de Δ passant par v_+ et donc, en passant dans une carte locale bien choisie — i.e envoyant un voisinage de v_+ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ — on obtient un endomorphisme du groupe fondamental de $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ — isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ —, noté N_f, donné par l'action de f.

Or, dans le cas de la cubique de Cayley $\mathcal{S}_C = \mathcal{S}_{(0,0,0,4)}$ on a revêtement double ramifié :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\to \mathcal{S}_C = \overline{\mathcal{S}_C} \setminus \Delta \\ (u,v) &\mapsto (u + u^{-1}, v + v^{-1}, uv + (uv)^{-1}). \end{aligned}$$

Comme la matrice M_f provient de l'action monomiale de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et détermine l'action de f sur $\mathcal{S}_C$ alors, quitte à conjuguer par une permutation de coordonnées — pour que les voisinages des axes dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ soient envoyés sur ceux de notre carte locale — M_f donne également l'action de f sur le groupe fondamental de $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$. Ainsi, N_f est conjuguée dans $PGL_2(\mathbb{Z})$ à M_f.

Comme chaque surface $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)}$ est lisse au voisinage de $\mathbb{P}^2_\infty$ et que sa trace à l'infini $\mathcal{S}_{(A,B,C,D)} \cap \mathbb{P}^2_\infty$ est indépendante des paramètres A, B, C et D, on peut étendre par déformation continue le résultat obtenu sur la cubique de Cayley $\mathcal{S}_C = \mathcal{S}_{(0,0,0,4)}$. Un résultat dû à Dloussky (cf. [Can09, Dlo88, Fav00]) nous permet alors de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.3 ([Can09]).
Soit $f \in \mathcal{A}$ un élément hyperbolique. Alors il existe une matrice $N_f \in GL_2(\mathbb{Z})$ à coefficients positifs conjuguée à M_f dans $PGL_2(\mathbb{Z})$, un voisinage ouvert U de $v_+ := \mathrm{Ind}(f^{-1})$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ et un biholomorphisme

$$\psi_f^+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to U$$

tels que :
- *$\psi_f^+(0,0) = v_+$;*
- *pour tout $(u,v) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ on a :*

$$\psi_f^+((u,v)^{N_f}) = f(\psi_f^+(u,v)),$$

où la notation $(u,v)^{N_f}$ désigne l'action monomiale de N_f.

Si on définit le bassin d'attraction de l'origine pour la matrice N_f comme suit :

$$\Omega(N_f) := \{(u,v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, | \, (u,v)^{N_f^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$$

et celui de v_+ pour l'application f comme :

$$\Omega(v_+) := \overline{\Omega(v_+)} \cap \mathcal{S},$$

où :

$$\overline{\Omega(v_+)} := \{m \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{v_-\} \,|\, f^n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} v_+\},$$

alors on peut affiner la proposition 2.3 de la façon suivante.

Proposition 2.4 (cf. [Can09]).
Soit $f \in \mathcal{A}$ un élément hyperbolique. Alors l'application ψ_f^+ s'étend en un difféomorphisme :

$$\psi_f^+ : \Omega(N_f) \to \Omega(v_+)$$

conjuguant f à l'action monomiale de N_f. En particulier, si $m \in \mathcal{S}$ est d'orbite positive non bornée alors $f^n(m)$ tend à l'infini vers le point d'indétermination v_+ de f^{-1} dans $\overline{\mathcal{S}}$.

Démonstration : Soit $(u, v) \in \Omega(N_f)$; alors par définition du bassin d'attraction, il existe $n \geq 0$ tel que $(u, v)^{N_f^n} \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$. De fait, comme f est inversible sur $\mathcal{S}$, on peut utiliser l'équation fonctionnelle définissant ψ_f^+ pour l'étendre au point (u, v) :

$$\psi_f^+(u, v) := f^{-n} \circ \psi_f^+((u, v)^{N_f^n}).$$

On a ainsi construit un difféomorphisme local :

$$\psi_f^+ : \Omega(N_f) \to \mathcal{S}$$

d'image $\Omega(v_+)$. Cette application est de plus injective : en effet, si (u, v) et $(\hat{u}, \hat{v})$ sont dans $\Omega(N_f)$ et vérifient $\psi_f^+(u, v) = \psi_f^+(\hat{u}, \hat{v})$ alors pour tout $n \geq 0$:

$$f^n \circ \psi_f^+(u, v) = f^n \circ \psi_f^+(\hat{u}, \hat{v}),$$

soit :

$$\psi_f^+((u, v)^{N_f^n}) = f^n \circ \psi_f^+((\hat{u}, \hat{v})^{N_f^n})$$

On conclut par injectivité de ψ_f^+ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ — choisir n tel que $(u, v)^{N_f^n}, (\hat{u}, \hat{v})^{N_f^n} \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ — .

□

Dynamique monomiale à l'infini. On souhaite étudier le comportement de la quantité $\log \|m\|$ pour $m = (x, y, z)$ proche du point v_+ ; supposons par exemple ce point égal à $[0 : 0 : 1 : 0]$. Au voisinage de v_+, la surface $\overline{\mathcal{S}}$ d'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)w = xyz + w^2(Ax + By + Cz) + Dw^3 \tag{7}$$

se réécrit dans la carte $\{z \neq 0\}$ comme la surface d'équation :

$$(X^2 + Y^2 + 1)W = XY + DW^3 + W^2(AX + BY + C) \tag{8}$$

où $X = \dfrac{x}{z}$, $Y = \dfrac{y}{z}$ et $W = \dfrac{w}{z}$, soit :

$$W = XY + DW^3 + W^2(AX + BY + C) + W(X^2 + Y^2). \tag{9}$$

Dans ces nouvelles coordonnées (X, Y, W), v_+ correspond au point $(0, 0, 0)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\log \|m\| &= \frac{1}{2} \log \left(\left| \frac{X}{W} \right|^2 + \left| \frac{Y}{W} \right|^2 + \frac{1}{|W|^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \log(|W|^2) + \frac{1}{2} \log(|X|^2 + |Y|^2 + 1) \\
&= -\frac{1}{2} \log(|XY + DW^3 + W^2(AX + BY + C) + W(X^2 + Y^2)|^2) + \frac{1}{2} \log(|X|^2 + |Y|^2 + 1).
\end{aligned}$$

Par un développement limité on a alors :

$$\log \|m\| = -\log(|XY|) + g(X, Y, W),$$

avec g une fonction bornée au voisinage de $(0, 0, 0)$.

Pour (x, y, z) assez proche de v_+ on peut alors appliquer notre difféomorphisme ψ_f^+, poser $(u, v) := {\psi_f^+}^{-1}(m)$ et montrer le lemme suivant.

Lemme 2.5.
Pour tout couple $(u,v) \in \Omega(N_f)$, il existe une fonction bornée h telle que :

$$\log \|\psi_f^+(u,v)\| = -\log|uv| + h(u,v).$$

Démonstration : Un développement de Taylor de la fonction ψ_f^+ au voisinage de $(0,0)$ nous donne :

$$\psi_f^+(u,v) = v_+ + L(u,v) + R(u,v),$$

où L est la partie linéaire de $\psi_f^+(u,v)$ et $R(u,v)$ une fonction lisse bornée sur $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ vérifiant $R(u,v) = O(\|(u,v)\|^2)$. Comme ψ_f^+ conjugue la dynamique de f à celle de N_f et que f (resp. N_f) ne contracte (au voisinage de v_+) que $\{X=0\}$ et $\{Y=0\}$ (resp. $\{u=0\}$ et $\{v=0\}$) alors ψ_f^+ envoie les axes du repère $(0,u,v)$ sur ceux de (v_+,X,Y). De fait $L = d\psi_f^+(0,0)$ préserve les directions tangentes aux axes, soit les axes eux–mêmes, *ergo* :

$$L \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}$$

et quitte à conjuguer on peut se ramener au premier cas, soit :

$$(X,Y) = (r_1u, r_2v) + R(u,v).$$

De plus, comme ψ_f^+ préserve les axes on peut l'écrire, quitte à permuter les coordonnées sous la forme :

$$\psi_f^+(u,v) = \begin{pmatrix} u\psi_1(u,v) \\ v\psi_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Au final on trouve :

$$\log \|\psi_f^+(u,v)\| = -\log(|uv|) + h(u,v), \tag{10}$$

avec h une fonction bornée sur $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

□

Posons $(u_n,v_n) := (u,v)^{N_f^n}$; alors :

$$\frac{1}{\lambda^n}\log\|f^n(m)\| = -\frac{1}{\lambda^n}\log(|u_nv_n|) + \frac{1}{\lambda^n}h(u_n,v_n).$$

Comme $\frac{1}{\lambda^n}h(u_n,v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — car h est bornée —, on souhaite à présent comprendre le comportement à l'infini de la quantité :

$$-\frac{1}{\lambda^n}\log(|u_nv_n|).$$

Comme $(u,v) \in \Omega(N_f)$ et $(u_n,v_n) \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, on peut supposer, quitte à remplacer (u,v) par un (u_{n_0},v_{n_0}), que $(u,v) \in \mathbb{D}^*\times\mathbb{D}^*$.

Lemme 2.6.
On a l'équivalent suivant quand $n \to \infty$:

$$\log|u_nv_n| \sim_{n\to\infty} \lambda^n(\alpha\log|u| + \beta\log|v|), \tag{11}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ sont les coordonnées du projeté du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sur la droite propre de N_f associée à sa valeur propre maximale λ.

Démonstration : Comme $(u,v) \in \mathbb{D}^*\times\mathbb{D}^*$, on peut donc écrire $(u,v) = (e^s,e^t)$ avec $(s,t) \in \mathbb{H}_0^{2\pi}\times\mathbb{H}_0^{2\pi}$, où :

$$\mathbb{H}_0^{2\pi} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0, \Im(z) \in (-\pi,\pi]\}.$$

On souhaite décrire le comportement sous l'action monomiale de N_f de la quantité suivante :

$$|uv| = |e^{s+t}| = e^{\Re(s+t)}\,;$$

pour ce faire, on pose $\ell(s,t) := s+t$ et on commence par remarquer que, si on pose $\varphi(x,y) := (e^x,e^y)$ on a :

$$(u_n,v_n) = \varphi\left(N_f^n\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\right),$$

où la notation multiplicative désigne l'action linéaire de la matrice N_f^n sur $\mathbb{C}^2$, et donc :

$$\begin{aligned} |u_n v_n| &= \exp\left(\Re\left(\ell\left(N_f^n\begin{pmatrix} s \\ t\end{pmatrix}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\ell\left(N_f^n\begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix}\right)\right). \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de comprendre l'action de $\ell \circ N_f$ sur $\mathbb{R}^2$, à savoir le comportement quand $n \to \infty$ de :

$$\frac{1}{\lambda^n}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} N_f^n \begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix}\right).$$

Notons (α, β) les coordonnées du projeté du vecteur $\begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix}$ sur la droite propre de N_f associée à λ. Alors on a :

$$\frac{1}{\lambda^n}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} N_f^n \begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^n}\,{}^t\left({}^t N_f^n\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix} = \alpha\Re(s) + \beta\Re(t),$$

d'où :

$$\left(\ell \circ N_f^n\begin{pmatrix}\Re(s) \\ \Re(t)\end{pmatrix}\right) \sim_{n\to\infty} \lambda^n(\alpha\Re(s) + \beta\Re(t)).$$

Ergo :

$$\log|u_n v_n| \sim_{n\to\infty} \lambda^n(\alpha\Re(s) + \beta\Re(t)) = \lambda^n(\alpha\log|u| + \beta\log|v|).$$

□

Des deux lemmes précédents on déduit l'équivalent suivant :

$$\frac{1}{\lambda^n}\log\|f^n(m)\| \sim_{n\to\infty} -(\alpha\log|u| + \beta\log|v|). \tag{12}$$

Remarquons que cette estimation n'est toutefois valable que pour m suffisamment proche de v_+, *i.e* pour (u, v) dans $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$.

2.4 Fonctions de Green d'un élément hyperbolique

Théorème A (Fonctions de Green dynamiques).
Soit $f \in \mathcal{A}$ un élément hyperbolique et soit $m \in \mathcal{S}$. Alors la quantité suivante est bien définie :

$$G_f^+ : m \mapsto \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^n}\log^+\|f^n(m)\|$$

et :

(i) la fonction G_f^+ est pluri–harmonique (resp. pluri–sous–harmonique) sur le complémentaire de $K^+(f)$ dans $\mathcal{S}$ (resp. sur $\mathcal{S}$), où $K^+(f)$ est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ à orbites positives bornées sous f — appelé ensemble de Julia rempli — ;

(ii) l'ensemble des zéros de G_f^+ est l'ensemble de Julia rempli $K^+(f)$;

(iii) on a la relation suivante :

$$G_f^+ \circ f = \lambda G_f^+; \tag{13}$$

(iv) si $m = \psi_f^+(u, v) \in \psi_f^+(\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*)$ on a :

$$G_f^+(m) \sim_{m\to v_+} = -\alpha\log|u| - \beta\log|v| \tag{14}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ sont les coordonnées du projeté du vecteur $\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$ sur la droite propre de N_f associée à sa valeur propre maximale λ (cf. paragraphe 2.3) ;

(v) la fonction G_f^+ est localement höldérienne.

Démonstration : Commençons par remarquer que si $m \in K^+(f)$ alors la suite $\|f^n(m)\|$ est, par définition, bornée et :

$$\frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

i.e $G_f^+(m)$ est bien défini et vaut 0.

Considérons à présent $m \notin K^+(f)$; on sait qu'un tel point m appartient nécessairement au bassin d'attraction $\Omega(v_+) \subset \mathcal{S}$ de v_+. On peut alors considérer le difféomorphisme $\psi_f^+ : \Omega(N_f) \to \Omega(v_+)$ vérifiant :

$$\forall (u,v) \in \Omega(N_f), \quad f(\psi_f^+(u,v)) = \psi_f^+((u,v)^{N_f}).$$

Posons $(u,v) := {\psi_f^+}^{-1}(m)$ et $(u_n, v_n) := (u,v)^{N_f^n}$. Comme $f^n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} v_+$, pour n assez grand $\log^+ \|f^n(m)\| = \log \|f^n(m)\|$. En appliquant l'équivalent (12), on a alors — avec les notations du paragraphe 2.3 — :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*, \qquad G_f^+ \circ \psi_f^+(u,v) = -\alpha \log|u| - \beta \log|v|. \tag{15}$$

(*i*) Soit H un compact de $\mathcal{S}$, soit $m \in H$ et soient $n, p \geq 0$. Si $m \in K^+(f)$ alors on a une borne uniforme :

$$\left| \frac{1}{\lambda^{n+p}} \log^+ \|f^{n+p}(m)\| - \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \right| \leq \frac{1}{\lambda^n} 2M \text{ où } \log \|f^n(m)\| \leq M.$$

Dans le cas contraire, $f^n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} v_+$ et donc pour n assez grand on a $m = \psi_f^+(u,v)$ avec $(u,v) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ et $\|f^n(m)\| > 1$, *ergo* $\log^+ \|f^n(m)\| = \log \|f^n(m)\|$ et :

$$\left| \frac{1}{\lambda^{n+p}} \log^+ \|f^{n+p}(m)\| - \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \right| = \frac{1}{\lambda^{n+p}} \left| \log \|f^{n+p}(m)\| - \lambda^p \log \|f^n(m)\| \right|$$

Or on vient de voir qu'il existait une constante C_m dépendant uniquement de l'orbite de m — notre $-(\alpha \log|u| + \beta \log|v|)$ — telle que $\log \|f^n(m)\| = C_m \lambda^n + \lambda^n \varepsilon_m(n)$, avec $\varepsilon_m(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc :

$$\left| \frac{1}{\lambda^{n+p}} \log^+ \|f^{n+p}(m)\| - \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \right| = \frac{1}{\lambda^{n+p}} \left| \varepsilon_m(n+p) - \varepsilon_m(n) \right|.$$

Comme $|\varepsilon_m(n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors pour tout $\eta > 0$ et $m \in H$, il existe $N_m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_m, \quad |\varepsilon_m(n)| \leq |\varepsilon_m(N_m)| < \eta$$

d'où :

$$\left| \frac{1}{\lambda^{n+p}} \log^+ \|f^{n+p}(m)\| - \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(m)\| \right| \leq 2|\varepsilon_m(N_m)|.$$

Or, comme C_m et $\log \|f^n(m)\|$ sont continues en m (cf. (*iv*) pour le premier point),

$$m \mapsto \varepsilon_m(N_m) = \lambda^{-N_m}(\log \|f^{N_m}(m)\| - C_m)$$

est continue. Par compacité de H, il existe donc $m_0 \in H$ tel que :

$$\sup_{m \in H} \varepsilon_m(N_m) = \varepsilon_{m_0}(N_{m_0})$$

d'où :

$$0 \leq 2|\varepsilon_m(N_m)| \leq 2|\varepsilon_{m_0}(N_{m_0})| < 2\eta$$

cette dernière majoration étant uniforme en m et p. Ainsi, par le critère de Cauchy uniforme, la suite définissant G_f^+ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{S}$ et donc la fonction limite hérite des propriétés de pluri–(sous–)harmonicité de ses termes.

(*iii*) Cela découle du fait que si $m \in \mathcal{S}$ alors :

$$\frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^n(f(m))\| = \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^{n+1}(m)\| = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^{n+1}} \log^+ \|f^{n+1}(m)\| \right).$$

(v) La preuve qui suit est adaptée de [Bri97]. Comme G_f^+ est de classe $\mathcal{C}^1$ hors de tout voisinage de $K^+(f)$ elle y est localement lipschitzienne donc höldérienne. Fixons à présent $z_1 \in \mathcal{S}$ et $z_0 \in K^+(f)$ tels que :

$$d(z_1, K^+(f)) = \|z_1 - z_0\|.$$

Si $z_1 \in K^+(f)$, il est clair que $0 = G_f^+(z_1) \leq C\underbrace{d(z_1, K^+(f))}_{=0}{}^\gamma$ pour tous $C, \gamma > 0$. Dans le cas contraire, commençons par remarquer que par définition de l'ensemble de Julia rempli $K^+(f)$, il existe un $R_0 > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^n(z_0)\| \leq R_0.$$

Fixons un nombre réel positif $R \geq R_0 + 1$ et posons, comme $z_1 \notin K^+(f)$:

$$N := \min\{n \geq 0 \,|\, \|f^n(z_1)\| > R\} < \infty;$$

alors, par inégalité des accroissements finis on a :

$$\begin{aligned} |\, \|f^N(z_1)\| - \|f^N(z_0)\| \,| &\leq \|f^N(z_1) - f^N(z_0)\| \\ &\leq \sup_{\|z\|\leq R} \|df(z)\| \|f^{N-1}(z_1) - f^{N-1}(z_0)\| \text{ car } \|f^{N-1}(z_1)\| \leq R \\ &\vdots \\ &\leq (\sup_{\|z\|\leq R} \|df(z)\|)^N \|z_1 - z_0\| \\ &\leq (\sup_{\|z\|\leq R} \|df(z)\|)^N d(z_1, K^+(f)). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant :

$$H(R) := \sup_{\|z\|\leq R} \|df(z)\|$$

on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq R - R_0 &\leq |\, \|f^N(z_1)\| - \|f^N(z_0)\| \,| \\ &\leq H(R)^N d(z_1, K^+(f)) \end{aligned}$$

et donc $H(R)^N d(z_1, K^+(f)) \geq 1$. En posant $\gamma := \dfrac{\log(\lambda)}{\log(H(R))}$ on trouve alors :

$$\frac{1}{\lambda^N} \leq d(z_1, K)^\gamma. \tag{16}$$

Par le résultat du point (iii) il vient :

$$\begin{aligned} G_f^+(z_1) &= \frac{1}{\lambda^N} G_f^+ \circ f^N(z_1) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^N} \sup_{\|z\|\leq R} G_f^+ \circ f(z) \text{ car } \|f^{N-1}(z_1)\| \leq R \\ &\leq d(z_1, K^+(f))^\gamma \sup_{\|z\|\leq R} G_f^+ \circ f(z) \text{ par (16)}. \end{aligned}$$

En posant :

$$C := \sup_{\|z\|\leq R} G_f^+ \circ f(z)$$

on a *in fine* :

$$G_f^+(z_1) \leq C d(z_1, K^+(f))^\gamma \tag{17}$$

pour tout point $z_1 \in \mathcal{S}$. La fonction G_f^+ est donc localement höldérienne au voisinage de $K^+(f)$.

□

Suivant [Can09], on peut alors considérer le courant positif fermé associé à la fonction G_f^+, à savoir :

$$T_f^+ := dd^c G_f^+ = 2i\partial\bar{\partial} G_f^+$$

qui vérifie alors la relation :

$$f^* T_f^+ = \lambda T_f^+.$$

Par construction, le support dans $\mathcal{S}$ du courant T_f^+ est l'ensemble de Julia $J^+(f) := \partial K^+(f)$.

Corollaire A.1.
Soit $f \in \mathcal{A}$ un élément hyperbolique et soit $m \in \mathcal{S}$. Alors il existe un voisinage U de v_+ dans le compactifié $\overline{\mathcal{S}}$ tel que :

$$dd^c G_{f\,|U}^+ = -2\pi \left(\alpha \int_{X=0} + \beta \int_{Y=0} \right),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et (v_+, X, Y) est un repère local au voisinage de v_+ avec X et Y le long des côtés de Δ incidents à v_+.

Démonstration : Posons $U := {\psi_f^+}^{-1}(\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*)$; alors d'après l'égalité (15) on a :

$$dd^c G_{f\,|U}^+ = dd^c(-\alpha \log |u| - \beta \log |v|) = dd^c(-\alpha \log |X| - \beta \log |Y|)$$

d'après le paragraphe 2.3. Le résultat découle alors du lemme de Lelong–Poincaré.

$\square$

Remarque : quitte à remplacer f par son inverse f^{-1}, on peut définir la fonction de Green dynamique négative :

$$G_f^- := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log^+ \|f^{-n}(m)\|.$$

Les résultats énoncés *supra* se généralisent à cette nouvelle fonction.

3 Opérateurs de Schrödinger discrets

3.1 Position du problème

On considère l'opérateur suivant, défini sur l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des suites complexes $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de carré sommable :

$$\begin{aligned} H_{\kappa,w} : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \xi &\mapsto (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} + \kappa v_w(n)\xi_n)_n \end{aligned}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$ est une constante fixée et $v_w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, appelée potentiel de l'opérateur $H_{\kappa,w}$, le tout pour un paramètre w parcourant un certain espace topologique W.

Commençons par remarquer que l'opérateur $H_{\kappa,w}$ est auto–adjoint continu et que :

$$\|H_{\kappa,w}\| \le 2 + |\kappa|.$$

On s'intéresse ensuite à son spectre $\Sigma_{\kappa,w} \subset \mathbb{R}$; l'équation vérifiée par un hypothétique couple valeur propre – vecteur propre (E, ξ) est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \xi_{n+1} + \xi_{n-1} + \kappa v_w(n)\xi_n = E\xi_n \tag{18}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \xi_n \end{pmatrix} = M_{n,\kappa,w}^E \begin{pmatrix} \xi_n \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}$$

où :

$$M_{n,\kappa,w}^E := \begin{pmatrix} E - \kappa v_w(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}).$$

Avant de poursuivre, particularisons notre problème en explicitant le potentiel v_w.

Cas 1 : rotations sur le cercle. On définit une application $V : \mathbb{S}^1 \to \{0,1\}$ comme suit :

$$V(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \theta > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour $\theta \in (-\pi, \pi]$. Fixons ensuite un entier quadratique $\vartheta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et notons Rot_ϑ la rotation d'angle $2\pi\vartheta$ sur le cercle $\mathbb{S}^1$. On définit alors, pour $w \in W := \mathbb{S}^1$ le potentiel :

$$\begin{aligned} v_w : \mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto V(\mathrm{Rot}_\vartheta^n(w)). \end{aligned}$$

Notons que comme ϑ est irrationnel les orbites sous l'action des itérées de Rot_ϑ sont denses dans $\mathbb{S}^1$.

Cas 2 : décalages à gauche. Considérons le groupe libre à deux générateurs $\mathbf{F}_2 := \langle a, b \,|\, \emptyset \rangle$ et fixons $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{F}_2)$ positif — *i.e* tel que les images $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ soient des mots en a et b — ; on peut lui associer une matrice $M_\varphi \in GL_2(\mathbb{Z})$ via le passage au quotient $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbf{F}_2/[\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2]$. Plus précisément (cf. [LS77] pour les détails de la preuve), on a un épimorphisme :

$$\tau : \mathrm{Aut}(\mathbf{F}_2) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL_2(\mathbb{Z}),$$

dont le noyau se trouve être égal à $\mathrm{Inn}(\mathbf{F}_2)$ et donc :

$$\mathrm{Out}(\mathbf{F}_2) \cong GL_2(\mathbb{Z}).$$

Supposons à présent que φ soit choisi de telle sorte que la matrice M_φ soit hyperbolique, soit, quitte à remplacer φ par φ^2, que $\det(M_\varphi) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M_\varphi) > 2$ — le spectre de M_φ est donc de la forme $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ avec $\lambda > 1$ un nombre réel —. Alors, par la proposition 2.3, on peut supposer quitte à conjuguer que les coefficients de M_φ sont tous positifs.

Considérons alors l'ensemble Ω des mots finis en a et b, muni de la topologie induite par la distance :

$$d : (u, v) \mapsto \frac{1}{\inf\{|n| \,|\, u_n \neq v_n\} + 1}.$$

Cet ensemble s'injecte continûment — au sens de cette topologie — dans $\tilde{\Omega} := \{\varepsilon, a, b\}^{\mathbb{Z}}$ en complétant tout mot fini par ε. L'automorphisme φ se prolonge alors en une substitution $\iota : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ admettant un mot invariant "infini positivement" $u_+ \in \{\varepsilon, a, b\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \tilde{\Omega}$.

Exemple : on considère la substitution ζ dite de Fibonacci :

$$a \mapsto ab\,, \quad b \mapsto a.$$

Le mot infini ζ–invariant s'obtient alors en "itérant" la substitution, à savoir :

$$\begin{gathered} b \\ a \\ ab \\ aba \\ abaab \\ abaababa \\ abaababaabaab \\ \vdots \end{gathered}$$

On s'intéresse ensuite au décalage à gauche :

$$\begin{aligned} T : \tilde{\Omega} &\to \tilde{\Omega} \\ u &\mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et à l'ensemble Ω_0 des valeurs d'adhérences de la suite $(T^p u_+)_{p\geq 0}$. Pour $w \in W := \Omega_0$ on définit alors un potentiel :

$$\begin{aligned} v_w : \mathbb{Z} &\to \{0,1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } w_n = a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

Remarquons de plus que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $w_n = (T^n w)_0$ et donc $v_w(n) = V(T^n w)$, où :

$$V(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \xi_0 = a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Dans la suite de ce document, nous considérerons que le potentiel v_w rentre dans l'un des deux cas que nous venons d'énoncer.

3.2 Spectre presque sûr, exposants de Lyapounov

Dans les deux cas que nous venons d'énoncer, il existe une unique mesure de probabilité ν sur l'espace topologique W qui soit invariante sous l'action de la famille d'applications considérées — à savoir les itérées de la rotation Rot_ϑ ou du décalage à gauche T —; il s'agit de la mesure de Lebesgue dans les cas $W = \mathbb{S}^1$ et de la mesure $\underline{\delta}^{\mathbb{Z}}$, où $\underline{\delta} := \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$ dans le second cas (cf. [Dam07]).

Spectre presque sûr. Dans toute la suite, on considère le paramètre $\kappa \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors le résultat suivant, qui provient de l'ergodicité de nos transformations Rot_ϑ et T.

Théorème 3.1 (Pastur, 1980). *Il existe un ensemble compact : $\Sigma_\kappa \subset [-2-|\kappa|, 2+|\kappa|]$ tel que, pour ν–presque tout w :*

$$\Sigma_{\kappa,w} = \Sigma_\kappa.$$

Densité d'états. Considérons l'opérateur suivant, pour $N \geq 0$:

$$\begin{aligned} H^N_{\kappa,w} : \mathbb{C}^{\{-N,\ldots,N\}} &\to \mathbb{C}^{\{-N,\ldots,N\}} \\ \xi &\mapsto (H_{\kappa,w}\xi)_{-N\leq n\leq N} \end{aligned}$$

correspondant à la restriction de l'opérateur $H_{\kappa,w}$ à $\{-N,\ldots,N\}$ avec conditions de Dirichlet au bord — pour $\xi \in \mathbb{C}^{\{-N,\ldots,N\}}$, on pose $\xi_n = 0$ pour $|n| > N$. Cet opérateur peut être vu comme un endomorphisme symétrique de $\mathbb{C}^{2N+1}$ et possède donc $2N+1$ valeurs propres —comptées avec multiplicité — $\lambda_0^N, \ldots, \lambda_{2N}^N \in \mathbb{R}$. Définissons une mesure de probabilité :

$$\mu_N := \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} \delta_{\lambda_j^N}.$$

On a alors le résultat suivant, dû à Avron et Simon.

Théorème 3.2 (Avron–Simon, 1983). *Pour ν–presque tout w, la suite de mesures de probabilité $(\mu_N)_{N\geq 1}$ converge faiblement vers une mesure dk_κ, appelée densité d'états, dont le support est le spectre presque–sûr Σ_κ.*

Revenons–en à présent au spectre de l'opérateur $H_{\kappa,w}$. On souhaite estimer la croissance de la norme des itérées de la matrice suivante :

$$M^E_{n,\kappa,w} := \begin{pmatrix} E - \kappa v_w(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

pour ce faire, on considère la quantité suivante, appelée exposant de Lyapounov :

$$\gamma_\kappa(E) := \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_W \log\left\|\prod_{n=0}^{N} M^E_{n,\kappa,w}\right\| d\nu(w).$$

Le théorème d'Osseledets nous affirme que cette quantité est bien définie et que :

$$\log \left\| \prod_{n=0}^{N} M^E_{n,\kappa,w} \right\|$$

est constant ν–presque sûrement en w. On a alors une formule due à Thouless :

$$\gamma_\kappa(E) = \int_{\Sigma_\kappa} \log |E - E'| dk_\kappa(E'). \tag{19}$$

En appliquant le lemme de Lelong–Poincaré on trouve :

$$dd^c \gamma_\kappa = 2\pi dk_\kappa. \tag{20}$$

Synthèse. Comme Σ_κ est un compact on peut considérer l'ouvert $U := \mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa$ qui vérifie alors $\partial U = \Sigma_\kappa$. On utilise alors le résultat suivant.

Proposition 3.3 ([Dam00]).
Le spectre presque sûr Σ_κ coïncide avec l'ensemble des zéros de l'exposant de Lyapounov γ_κ.

Corollaire 3.3.1.
L'exposant de Lyapounov γ_κ est la fonction de Green du domaine $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa$.

Démonstration : La formule (19) montre que la fonction $\gamma_\kappa : U \to (0, \infty)$ vérifie la condition (i) ; de plus, pour $E \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\gamma_\kappa(E) - \log |E| &= \int_{\Sigma_\kappa} \log |E - E'| dk_\kappa(E') - \log |E| \\
&= \int_{\Sigma_\kappa} \log |E - E'| - \log |E| dk_\kappa(E') \text{ — car } dk_\kappa(\Sigma_\kappa) = 1\text{—} \\
&= \int_{\Sigma_\kappa} \log \left| 1 - \frac{E'}{E} \right| dk_\kappa(E') \\
&\sim_{E \to \infty} \frac{1}{E} \quad \underbrace{\int_{\Sigma_\kappa} |E'| dk_\kappa(E')}_{\text{fini car } \Sigma_\kappa \text{ est compact}} \\
&\xrightarrow[E \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

et donc γ_κ vérifie la condition (ii). Enfin, la condition (iii) découle de la proposition précédente.

□

3.3 Lien à la dynamique

On s'intéresse à la surface $\mathcal{S}_{4+\kappa^2} = \mathcal{S}_{(0,0,0,4+\kappa^2)}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4 + \kappa^2$$

et on considère la courbe de Schrödinger de $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$, à savoir la courbe paramétrée par :

$$\begin{aligned}
s : \mathbb{C} &\to \mathcal{S}_{4+\kappa^2} \\
E &\mapsto (E - \kappa, E, E(E - \kappa) - 2).
\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{F}_2)$, de substitution associée ι, vérifiant les hypothèses données lors de la description du cas 2 pour le potentiel et soit f l'automorphisme polynomial de $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$ associé à φ^{-1} ; on a alors par définition :

$$\forall E \in \mathbb{C}, \quad f(s(E)) = (\mathrm{Tr}(M_{\kappa,E}(\iota(a))), \mathrm{Tr}(M_{\kappa,E}(\iota(b))), \mathrm{Tr}(M_{\kappa,E}(\iota(ab)))),$$

où :

$$M_{\kappa,E}(a) := \begin{pmatrix} E - \kappa & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\kappa,E}(b) := \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \{a, b\}^n$:

$$M_{\kappa,E}(u) := \prod_{i=0}^{n-1} M_{\kappa,E}(u_{n-i}).$$

On trouve alors le résultat suivant dans [Dam00].

Théorème 3.4 (Damanik, 2000)**.**
Le spectre presque sûr Σ_κ vérifie :

$$\Sigma_\kappa = \{E \in \mathbb{C} \,|\, s(E) \in K^+(f)\}.$$

Comme le sous–groupe $\mathcal{A}$ est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}4 + \kappa^2)$ et que f est d'ordre infini, on peut supposer — quitte à remplacer f par un f^{n_0} — que $f \in \mathcal{A}$; c'est alors un élément hyperbolique de ce sous–groupe. L'unicité de la fonction de Green du domaine Σ_κ permet alors d'établir une correspondance entre la fonction de Green dynamique de l'automorphisme f et l'exposant de Lyapounov γ_κ.

Théorème B.
Soit $E \in \mathbb{C}$. Alors on a :

$$\gamma_\kappa(E) = \frac{1}{\alpha + \beta} G_f^+(s(E)),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ sont les coordonnées du projeté du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur la droite propre de N_f associée à sa valeur propre maximale.

Démonstration : On considère la fonction :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa &\to (0, \infty) \\ E &\mapsto G_f^+\left(s\left(E\right)\right) \end{aligned}$$

et on souhaite montrer qu'il s'agit d'une fonction de Green pour le domaine $U := \mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa$. Comme la fonction $z \mapsto \log^+ \|z\|$ est pluri–sous–harmonique, la fonction g vérifie la condition (i). De plus, la condition (iii) découle du fait que si $E \in \partial U = \Sigma_\kappa$ alors $s(E) \in K^+(f)$ d'après le théorème précédent et donc $g(E) = G_f^+(s(E)) = 0$.

Concernant la condition (ii), commençons par étudier l'automorphisme f ; par construction de la surface $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$, f est un automorphisme polynomial en les variables $(x, y, z) = (\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B), \mathrm{Tr}(AB))$, où $A = \rho(a)$ et $B = \rho(b)$ sont associées à une représentation $\rho : \mathbf{F}_2 \to SL_2(\mathbb{C})$ — on voit $\mathcal{S}_{4+\kappa^2}$ comme la surface de caractères $\chi(\mathbb{T}_1^2)$ —. On sait de plus que — quitte à la remplacer par N_f en conjuguant — la matrice $M_f = M_\varphi$ associée à f est à coefficients positifs, soit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_\varphi^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}.$$

Par définition on a alors :

$$f^n(x, y, z) = (\mathrm{Tr}(A^{p_n} B^{q_n}), \mathrm{Tr}(A^{r_n} B^{s_n}), \mathrm{Tr}(A^{p_n} B^{q_n} A^{r_n} B^{s_n})),$$

et les formules de Fricke–Klein nous permettent de montrer par récurrence qu'il s'agit de polynômes en x, y et z et que la troisième coordonnées correspond au degré maximal présent. Ainsi, f contracte le triangle à l'infini Δ sur le point $v_+ := [0 : 0 : 1 : 0]$. La relation (14) nous donne alors :

$$g(E) \sim_{E \to \infty} -\alpha \log |x| - \beta \log |y|,$$

où $s\,(E) = [x : y : 1 : 1]$. Or :

$$s([E : t]) = [Et - t^2\kappa : Et : E^2 - Et\kappa - 2t^2 : t^2],$$

d'où, dans la carte $\{z \neq 0\}$:

$$\begin{aligned} s(E) &= s\left([E : 1]\right) \\ &= \left(\frac{E - \kappa}{E^2 - E\kappa - 2}, \frac{E}{E^2 - E\kappa - 2}, \frac{1}{E^2 - E\kappa - 2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{E}\left(\frac{1 - \kappa/E}{1 - \kappa/E - 2/E^2}\right), \frac{1}{E}\left(\frac{1}{1 - \kappa/E - 2/E^2}\right), \frac{1}{E^2 - E\kappa - 2}\right) \end{aligned}$$

et donc la limite suivante existe :

$$\lim_{E\to\infty} g(E) - (\alpha+\beta)\log|E|.$$

On conclut par unicité de la fonction de Green sur le domaine $U = \mathbb{C} \setminus \Sigma_\kappa$.

□

Corollaire B.1.
On a les résultats suivants :

(i)
$$dd^c(G_f^+ \circ s) = 2\pi(\alpha+\beta)dk_\kappa \quad ;$$

(ii) la fonction γ_κ est höldérienne au voisinage de Σ_κ.

DÉMONSTRATION :

(i) Ce point découle de la relation (20) ; notons de plus que l'on peut réécrire cette égalité de la façon suivante :
$$s^*(dd^c G_f^+) = 2\pi(\alpha+\beta)dk_\kappa.$$

(ii) On sait (cf. théorème A) que la fonction G_f^+ est localement höldérienne au voisinage de $K^+(f)$. De plus, comme $s(\mathbb{C}) \cap K^+(f) = \Sigma_\kappa$ est compact, cette propriété est globale.

Références

[BG99] Robert L. Benedetto and William M. Goldman. The topology of the relative character varieties of a quadruply-punctured sphere. *Experiment. Math.*, 8 (1), 1999.

[Bir74] Joan S. Birman. *Braids, links, and mapping class groups.* Princeton Univ. Press, Ann. of Math. Studies 82, 1974.

[Bri97] Jean-Yves Briend. Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{CP}^k$. *Thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse III*, `www.cmi.univ-mrs.fr/~briend/publications/th.ps`, 1997.

[BS91] Eric Bedford and John Smilie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. math.*, 103 (1), 1991.

[Can09] Serge Cantat. Bers and Hénon, Painlevé and Schrödinger. *Duke math. journal*, 149 (3), 2009.

[CL09] Serge Cantat and Frank Loray. Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation. *Ann. Inst. Fourier*, 59 (7), 2009.

[Dam00] David Damanik. Substition Hamiltonian with bounded trace map orbits. *J. Math. Anal. Appl.*, 249, 2000.

[Dam07] David Damanik. Lyapounov exponents and spectral analysis of ergodic Schrödinger operators : a survey of Kotani theory and its applications. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 76 (2), 2007.

[Dlo88] Georges Dloussky. Sur la classification des germes d'applications holomorphes contractantes. *Math. Annalen*, 280, 1988.

[ÈH74] Marat H. Èl'-Huti. Cubic surfaces of Markov type. *Mat. Sb. (N.S.)*, 93 (135), 1974.

[Fav00] Charles Favre. Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces. *J. Math. Pures Appl.*, 79 (5), 2000.

[Kli91] Maciej Klimek. *Pluripotential theory.* Oxford Sci. Pub., 1991.

[LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, 1977.

[Ran95] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[Sti93] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, GTM 72, 1993.