Fonctions de classe de Nilsson

Arnaud Girand et Ophélie Rouby

— 2013 —

Table des matières

1 Fonctions multiformes, monodromie **2**
1.1 Fonctions multiformes 2
1.2 Prolongement analytique le long d'un lacet 3

2 Fonctions de classe de Nilsson à une variable complexe **4**
2.1 Fonction à croissance modérée 4
2.2 Étude locale des fonctions de classe de Nilsson 7
2.3 Équation différentielle à points singuliers réguliers 10

3 Fonctions de classe de Nilsson à plusieurs variables **12**
3.1 Définition de fonctions de classe de Nilsson 12
3.2 Étude locale des fonctions de classe de Nilsson 13

4 Annexe : rappels sur les séries de Laurent **17**

Références **18**

1 Fonctions multiformes, monodromie

1.1 Fonctions multiformes

On se donne une variété analytique complexe X qu'on munit d'un revêtement connexe $\tilde{X} \xrightarrow{r} X$.

Définition 1.1 (Fonction multiforme, détermination) *On appelle fonction multiforme sur X toute application holomorphe $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f holomorphe d'un voisinage ouvert simplement connexe U d'un point $x \in X$ dans $\mathbb{C}$ est une détermination de $\tilde{f}$ sur U lorsque :*

$$f \circ r = \tilde{f} \text{ sur } r^{-1}(U)$$

En résumé, une détermination de $\tilde{f}$ est un germe d'application f tel que le diagramme suivant ait un sens (et commute) localement :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Remarque : Une fonction multiforme $\tilde{f}$ admettant une détermination f sur tout X est dite *uniforme*. On identifiera alors $\tilde{f}$ à $f \in \mathcal{O}(X)$.

Exemples :

1. On considère le revêtement universel $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ et on appelle log l'application la fonction multiforme correspond à l'identité de ce revêtement. Une détermination de log au voisinage d'un point x de $\mathbb{C}^*$ est alors un germe d'application $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)_x$ telle que l'on ait localement :

   $$f(\exp(z)) = z$$

   On montre alors en inversant localement le revêtement universel que les déterminations de log au voisinage de x sont exactement les germes des $z \mapsto f(z) + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle z^α la fonction multiforme correspond à la multiplication par α dans le revêtement universel $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$. Si $x \in \mathbb{C}^*$ alors les déterminations de z^α au voisinage de x sont exactement les $\exp(\alpha f(z))$, avec f une détermination du logarithme au voisinage de x. Si on fixe une telle détermination $\underline{\log}$, les déterminations de z^α au voisinage de x sont exactement les germes des fonctions suivantes :

   $$z \mapsto \exp(2i\pi k\alpha)\, \underline{z^\alpha}, \text{ où } \underline{z^\alpha} := \exp\big(\alpha \underline{\log}(z)\big)$$

Définition 1.2 *On dit q'une fonction multiforme $\tilde{f}$ est de détermination finie sur X si l'ensemble de ses déterminations en tout point de X engendre un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie.*

Exemples :

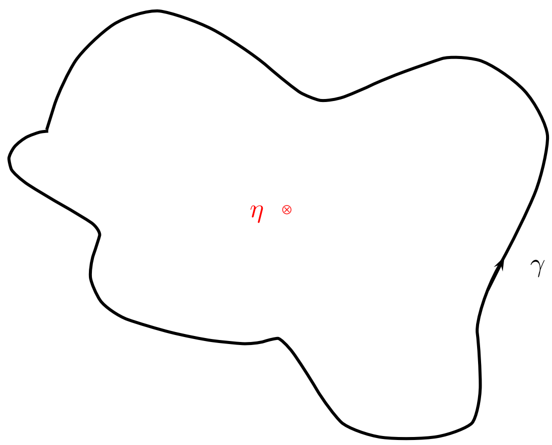
1. Le logarithme complexe est de détermination finie. Plus précisément, l'espace vectoriel engendré par ses déterminations est de dimension 2 : il s'agit de $\langle \underline{\log}, 2i\pi \rangle_{\mathbb{C}}$, où $\underline{\log}$ est un détermination fixée de log.
2. Plus généralement, la fonction $\log^p$ est de détermination finie et l'espace vectoriel engendré par ses déterminations est de dimension $p + 1$ (formule du binôme de Newton).
3. La fonction z^α, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ est de détermination finie et l'espace vectoriel engendré par ses déterminations est de dimension 1.

1.2 Prolongement analytique le long d'un lacet

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre $\mu \geq 1$ de la forme suivante :

$$\frac{d^\mu f}{dz^\mu} + a_0(z)\frac{d^{\mu-1} f}{dz^{\mu-1}} + \ldots + a_\mu(z) = 0 \tag{1}$$

On suppose que les fonctions a_i sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ (ou sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$). On considère l'ensemble P des pôles des a_i, que l'on suppose fini pour simplifier. On fixe un pôle $\eta \in P$ et un lacet γ faisant exactement un tour autour de η. Comme P est un ensemble fini et par principe des zéros isolés [1] on peut de plus supposer que la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ ne contient pas d'autre point de P que η et qu'aucun de ces pôles ne se situe sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ (on est en fait en train de considérer un ensemble de générateurs — modulo homotopie — de $\pi_1(\mathbb{C}/P)$).



On fixe un point $z_0 \in \mathrm{Im}(\gamma)$ et un disque ouvert U_0 centré en z_0 dans $\mathbb{C} \setminus P$. Sur l'ouvert U_0 on peut appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz qui nous dit que choisir une solution de (1) sur U revient à sélectionner un point $y_0 \in \mathbb{C}$ (via l'imposition de la condition initiale $f(z_0) = y_0$)). On fixe une telle condition initiale et on note f_0 la solution de (1) sur U_0 associée. On note de plus V_{z_0} l'ensemble des germes de solutions de (1) en z_0.

Par compacité, on peut recouvrir $\mathrm{Im}(\gamma)$ par un nombre finis de tels disques $U_0, \ldots, U_k$ centrés en des points $z_0, \ldots, z_k \in \mathrm{Im}(\gamma)$. Sur l'intersection $U_0 \cap U_1$, la fonction ${f_0}_{|U_0 \cap U_1}$ se recolle à une unique solution f_1 de (1) définie sur U_1, correspondant à une condition initiale y_1. En itérant ce procédé, on parvient à *prolonger analytiquement* f_0 *le long de* γ, i.e on associe à chaque ouvert U_i une solution f_i telle que :

$${f_i}_{|U_{i-1} \cap U_i} = {f_{i-1}}_{|U_{i-1} \cap U_i}$$

Question : Peut-on recoller f_k à f_0 sur $U_k \cap U_0$?

La réponse à cette question est, dans le cas général, non. En effet, si on considère l'équation suivante :

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{z} \tag{2}$$

Les solutions de cette équation différentielle sur le disque U_0 de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$ sont exactement les déterminations du logarithme sur cet ouvert. On note $\underline{\log}$ celle de ces déterminations qui vaut 0 en 1 et on considère le lacet $\gamma : (t \in [0,1]) \mapsto \exp(2i\pi t)$. Alors un relevé de γ dans le revêtement universel $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ est $\delta : t \mapsto 2i\pi t$; par unicité il s'agit donc du relevé de ce lacet, i.e prolonger $\underline{\log}$ analytiquement le long du lacet γ revient à suivre $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ le long du chemin δ. Le procédé décrit précédemment nous livre alors la fonction $\underline{\log} + 2i\pi \neq \underline{\log}$ et donc, pour reprendre les notations précédentes, on ne peut pas recoller f_k à f_0 sur $U_k \cap U_0$.

1. Appliqué aux dénominateurs des a_i.

Revenons au cas général ; on obtient alors une application T_γ sur V_{Z_0} définie par :

$$T_\gamma(f_0) := f_k$$

Cette application est appelée *transformation de monodromie* de l'équation (1) le long de γ. On remarque alors que cette application a les propriétés suivantes :

(i) si γ et γ' sont deux lacets alors $T_{\gamma.\gamma'} = T_\gamma \circ T_{\gamma'}$;

(ii) si γ est un lacet alors T_γ est inversible et $T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^{-1}$.

Proposition 1.1 *La transformation de monodromie T_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ dans $\mathbb{C} \setminus P$.*

DÉMONSTRATION :
Soit $(s \in [0,1]) \mapsto \gamma_s$ une homotopie entre deux lacets γ_0 et γ_1 de $\mathbb{C} \setminus P$. On recouvre (par compacité) chacun des chemins γ_s à l'aide d'un nombre fini d'ouverts, chacun de ces ouverts contenant les germes des chemins γ_t, pour t assez proche de s : la solution de (1) définie le long de ces γ_t vérifie alors la même condition initiale que celle définie sur γ_s et donc y est égale. De fait, l'application continue (par dépendance $\mathcal{C}^1$ en les conditions initiales d'une équation différentielle) qui à $s \in [0,1]$ associe T_{γ_s} est localement constante, donc constante. □

On obtient donc un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} T : \Pi_1(\mathbb{C} \setminus P, z_0) &\to GL(\mathbb{C}^\mu) \\ [\gamma] &\mapsto T_\gamma \end{aligned}$$

En exprimant l'application T_γ dans une base de l'espace des solutions de (1) sur U_0 (isomorphe à $\mathbb{C}^\mu$) on obtient une matrice $M_\gamma \in GL_\mu(\mathbb{C})$. Au final, on a bien construit une représentation :

$$M : \Pi_1(\mathbb{C} \setminus P, z_0) \to GL_\mu(\mathbb{C})$$

Exemple : Pour les solutions de l'équation (2) (déterminations du logarithme), on obtient le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} M : \Pi_1(\mathbb{C}^*, 1) &\to GL_2(\mathbb{C}) \\ \gamma_k &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2ik\pi & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où γ_k $(k \in \mathbb{Z})$ est le cercle de centre 0 et rayon 1 parcouru $|k|$ fois dans le sens positif (resp. négatif) si k est positif (resp. négatif).

Lien avec les fonctions multiformes : Un revêtement étant un homéomorphisme local, on peut définir une détermination d'une fonction multiforme de détermination finie sur une variété X au voisinage d'un point $z_0 \in X$ par le choix d'une "condition initiale" (valeur en z_0). De fait, on peut définir une transformation de monodromie par le même procédé de prolongement le long d'un lacet que pour les solutions d'une équation différentielle. On a alors la propriété suivante :

Proposition 1.2 *Une fonction multiforme de détermination de monodromie triviale est uniforme.*

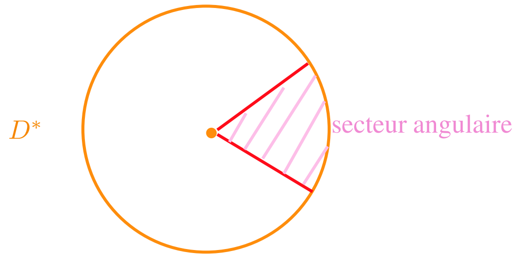
2 Fonctions de classe de Nilsson à une variable complexe

2.1 Fonction à croissance modérée

Définition 2.1 *Soit f une fonction analytique multiforme de détermination finie sur le disque épointé D^*. On dit que f est à croissance modérée près de l'origine si chaque détermination de f dans un secteur angulaire admet une majoration de la forme :*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^\alpha}$$

où C, α sont des constantes réelles et $C > 0$.



Remarque : La constante C peut dépendre de la détermination de f.
Par exemple, la fonction logarithme n'admet pas la majoration ci-dessus avec une même constante C.

Exemples :

1. La fonction logarithme à la puissance p où $p \in \mathbb{N}$ est à croissance modérée.
   En effet, les déterminations de cette fonction sont des combinaisons linéaires de $1, \underline{\log}(z), \underline{\log}^2(z), \ldots, \underline{\log}^p(z)$, il suffit donc de majorer $\underline{\log}(z)$ sur un secteur angulaire. Par définition pour $z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\underline{\log}_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\underline{Arg}_\alpha(z) \leq |z| + i(2\pi + \alpha)$$
   Ainsi sur le secteur angulaire adapté ne contenant pas la demi-droite $L_\alpha = \{t \exp(\alpha), t \in \mathbb{R}_+\}$, on a :
   $$|\underline{\log}_\alpha(z)| \leq ||z| + i(2\pi + \alpha)| \leq |z| + 2\pi + \alpha \leq 1 + 2\pi + \alpha$$
   car $z \in D^*$.
   Or pour $z \in D^*$, on a $|z| \leq 1$, donc $\dfrac{1}{|z|} \geq 1$, d'où :
   $$|\underline{\log}_\alpha(z)| \leq \frac{2\pi + \alpha + 1}{|z|}$$
   En considérant la combinaison linéaire définissant une détermination du logarithme à la puissance p, on obtient le résultat.
2. La fonction puissance z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$ est à croissance modérée.
   En effet, ses déterminations sont de la forme $\exp(2i\pi\alpha)\, \underline{z^\alpha}$. Ainsi, on a dans un secteur angulaire convenablement choisi :
   $$|\exp(2i\pi\alpha)\, \underline{z^\alpha}| = |\underline{z^\alpha}|$$
   On pose $\alpha = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors, on a :
   $$\begin{aligned}
   |\underline{z^\alpha}| &= |\exp\Big((a+ib)(\ln(|z|) + i\underline{\arg(z)})\Big)| \\
   &= |\exp\Big(a\ln(|z|) + ib\ln(|z|) + ia\underline{\arg(z)} - b\underline{\arg(z)}\Big)| \\
   &= |\exp(a\ln(|z|))\exp\Big(-b\underline{\arg(z)}\Big)| \\
   &= |\exp(\ln(|z|))|^a |\exp\Big(-\underline{\arg(z)}\Big)|^b \\
   &\leq |z|^a C
   \end{aligned}$$
   où $C > 0$ est une constante.

Remarque : La fonction $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ n'est pas à croissance modérée.

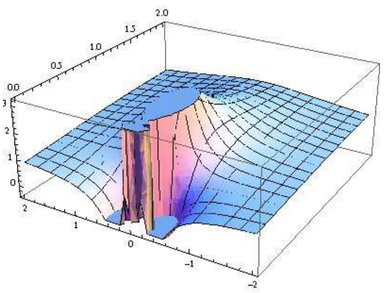


FIGURE 1 Partie réelle de $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $\Re(z) \geq 0$.

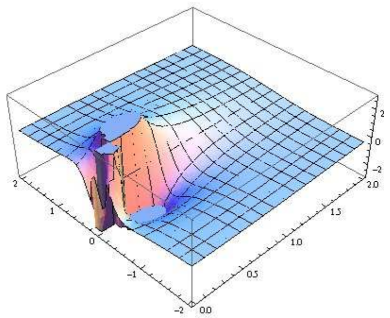


FIGURE 2 Partie imaginaire de $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $\Re(z) \geq 0$.

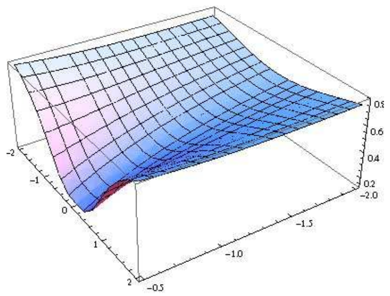


FIGURE 3 Partie réelle de $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $\Re(z) < 0$.

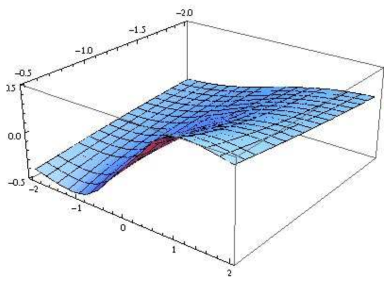


FIGURE 4 Partie imaginaire de $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $\Re(z) < 0$.

2.2 Étude locale des fonctions de classe de Nilsson

Théorème 2.1 *Soit $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\}$. Soit $D^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 2\}$. Soit f une fonction analytique multiforme sur D^*.*
Alors f est de détermination finie (respectivement de détermination finie et à croissance modérée) si et seulement si $\tilde{f}$ s'écrit dans $\tilde{D^*}$ sous la forme :

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i \in I} z^{\alpha_i} P_i(\log(z)) \tag{3}$$

où I est un ensemble fini d'indices, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $P_i(w)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}(D^*)$ (respectivement dans $\mathcal{O}(D)$).

Démonstration :
Considérons la forme (3), ie :

$$\sum_{i \in I} \underline{z^{\alpha_i}} P_i(\underline{\log}(z))$$

avec I un ensemble fini d'indices, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $P_i(w)$ un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}(D^*)$ (respectivement $\mathcal{O}(D)$).
Comme les coefficients de P_i sont des fonctions holomorphes sur le disque épointé D^* (respectivement D), alors on peut les décomposer en séries de Laurent (respectivement de Taylor) ; ainsi (3) se réécrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \underline{z^{\alpha_i}} P_i(\underline{\log}(z)) &= \sum_{i \in I} \underline{z^{\alpha_i}} \left(\sum_{k=0}^{p_i} a_k(z) \underline{\log}^k(z) \right) \\
&= \sum_{i \in I} \underline{z^{\alpha_i}} \left(\sum_{k=0}^{p_i} \left(\sum_{n_k} c_{n_k} z^{n_k} \right) \underline{\log}^k(z) \right) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{n_k} \underline{z^{\alpha_j + n_k}} c_{j,n_k} \underline{\log}^{p_j}(z) \\
&= \sum_{k} \sum_{j \in J} c_{j,k} \underline{z^{\alpha_j + k}} \underline{\log}^{p_j}(z)
\end{aligned}$$

où J est un ensemble fini d'indices, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $c_{j,k} \in \mathbb{C}$ et la somme sur k s'effectue sur $\mathbb{Z}$ (respectivement sur $\mathbb{N}$ dans le cas d'un développement de Taylor).

(a) Si la fonction f s'écrit sous la forme (3), alors elle est bien de détermination finie, car on peut réécrire cette somme sous la forme suivante :

$$\sum_{j \in J} \left(\underline{\log}^{p_j}(z) \underline{z^{\alpha_j}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} z^k \right)$$

Or la somme sur k est une fonction holomorphe sur D^* et on a ainsi seulement une somme finie de fonctions de déterminations finies, donc si f s'écrit sous cette forme, elle est bien de détermination finie.
De plus, si la somme infinie ne fait intervenir que des entiers $k \in \mathbb{N}$, ie on se place dans le cas où les polynômes sont à coefficients dans $\mathcal{O}(D)$. Alors sur un secteur angulaire bien choisi, on a :

$$|f(z)| \leq \sum_{j \in J} |\underline{\log}^{p_j}(z)| |\underline{z^{\alpha_j}}| \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{j,k} z^k \right|$$

Ainsi, on obtient d'un côté une somme finie de fonctions à croissance modérée et de l'autre une fonction holomorphe, donc f est bien à croissance modérée.

(b) Pour montrer que la condition est nécessaire, nous allons le faire en deux temps.
Cas 1 : $\mu = 1$
On suppose que l'espace vectoriel V_1 des déterminations de f dans $D \setminus \mathbb{R}_-$ est engendré par une seul générateur f_0 (on se place ici sur $D \setminus \mathbb{R}_-$, mais on aurait pu se placer sur D privé de n'importe

quelle demi-droite du type L_α, $D \setminus \mathbb{R}_-$ est un prototype d'ouvert simplement connexe).
Dans la base $\{f_0\}$, la transformation de monodromie est définie par :

$$\begin{aligned} T_\gamma : GL(V_1) &\longrightarrow GL(V_1) \\ f_0 &\longmapsto cf_0 \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{C}$.
Comme $cf_0 \in GL(V_1)$, alors $c \in \mathbb{C}^*$ et par surjectivité de l'exponentielle, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $c = \exp(2i\pi\alpha)$.
Par prolongement analytique le long du lacet γ définit par $\gamma : \theta \in [0,1] \longmapsto \exp(2i\pi\theta)$, on a :

$$T_\gamma(\underline{z^\alpha}) = \exp(2i\pi\alpha)\, \underline{z^\alpha}$$

Ainsi, si on considère l'image de $f_0\underline{z^{-\alpha}}$ par T_γ, on a :

$$T_\gamma(f_0\underline{z^{-\alpha}}) = \exp(2i\pi\alpha)\, f_0 \exp(-2i\pi\alpha)\, \underline{z^{-\alpha}} = f_0\underline{z^{-\alpha}}$$

Ce qui signifie que la fonction $f_0\underline{z^{-\alpha}}$ reste invariante par le prolongement analytique le long du lacet définissant la monodromie, ie que $f_0\underline{z^{-\alpha}}$ est une fonction analytique uniforme sur D et :

$$f = \phi\underline{z^\alpha}$$

où $\phi \in \mathcal{O}(D^*)$.
Par conséquent, f est bien de la forme (3).
Supposons maintenant que la fonction f est à croissance modérée.
Comme on l'a vu la fonction $\underline{z^{-\alpha}}f$ est uniforme sur D et admet une majoration par une puissance de z (puisque f et $\underline{z^{-\alpha}}$ sont à croissance modérée), ie $\exists c > 0$, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|f(z)\underline{z^{-\alpha}}| \leq \frac{c}{|z|^\beta}$$

Par conséquent d'après un théorème de Liouville, $\underline{z^{-\alpha}}f$ est méromorphe, autrement dit :

$$f(z) = \underline{z^{\alpha-n}}g(z)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathcal{O}(D)$ (car la fonction $f(z)\underline{z^\alpha}$ est déjà holomorphe sur D^* d'après ce qu'on vient de faire, donc si elle a des pôles, ils sont nécessairement en 0). Donc f s'écrit bien sous la forme voulue.

Cas 2 : cas général, ie $\dim V_1 = \mu$
Soit $b = \{b_1, \ldots, b_\mu\}$ un système de fonctions analytiques multiformes sur D^* formant une base de l'espace vectoriel engendré par les déterminations de f sur $D \setminus \mathbb{R}_-$.
Soit T_γ (respectivement M_γ) la transformation de monodromie (respectivement la matrice de monodromie) correspondant à un générateur γ de $\Pi_1(D^*, x_0)$.
Alors, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^\mu \arrow[r, "b"] \arrow[d, "M_\gamma"'] & V_{\tilde{D}^*} \arrow[d, "T_\gamma"] \\ \mathbb{C}^\mu \arrow[r, "b"] & V_{\tilde{D}^*} \end{tikzcd}$$

ie :

$$\gamma(b) = T_\gamma \circ b = b \circ M_\gamma$$

où $\gamma(b) = (\gamma(b_1), \ldots, \gamma(b_\mu))$ est le prolongement analytique de b le long du lacet γ.
Comme M_γ est inversible, alors par surjectivité de l'exponentielle, on sait qu'il existe une matrice complexe A telle que $M_\gamma = \exp(2i\pi A)$.
Considérons maintenant la fonction à valeurs matricielles :

$$z \longrightarrow \underline{z^A} = \exp(A\underline{\log}(z))$$

En effectuant le prolongement analytique des coefficients de cette matrice le long du lacet γ, on obtient :

$$\gamma(\underline{z^A}) = \exp(A(\underline{\log}(z) + 2i\pi)) = \exp(A\underline{\log}(z))\exp(A2i\pi) = \underline{z^A}\exp(2i\pi A) = \underline{z^A}M_\gamma$$

Considérons ensuite l'automorphisme $\underline{z^{-A}}$ du faisceau $\mathcal{O}^\mu_{\tilde{D^*}}$ et l'homomorphisme β défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\mu_{\tilde{D^*}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{D^*}} \\ (g_1,\dots,g_\mu) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\mu} g_i b_i \end{aligned}$$

Posons : $q = \beta \circ \underline{z^{-A}}$. Alors la restriction de q à $\mathcal{O}^\mu_{\tilde{D^*}}$ donne un homomorphisme de faisceau de $\mathcal{O}^\mu_{\tilde{D^*}}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{D^*}}$.
En effet, soit $g = (g_1,\dots,g_\mu) \in \mathcal{O}^\mu_{\tilde{D^*}}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \gamma(q(g_1,\dots,g_\mu)) &= \gamma(\beta \circ \underline{z^{-A}}(g_1,\dots,g_\mu)) \\ &= \gamma(\beta) \circ \gamma(\underline{z^{-A}})(\gamma(g_1,\dots,g_\mu)) \\ &= \beta \circ M_\gamma \circ M_\gamma^{-1} \circ \underline{z^{-A}}(g_1,\dots,g_\mu) \quad \text{d'après le calcul effectué ci-dessus;} \\ &= \beta \circ \underline{z^{-A}}(g_1,\dots,g_\mu) \\ &= q(g_1,\dots,g_\mu) \end{aligned}$$

ce qui montre que $q(g_1,\dots,g_\mu)$ est une fonction uniforme sur D^*, ie $q(g) \in \mathcal{O}_{\tilde{D^*}}$.
En particulier, les fonctions $g_i = q(e_i)$ sont uniformes, où $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^\mu$.
Maintenant, on obtient la condition (3) en explicitant la formule, où on a posé $V_{\tilde{D^*}}$ l'espace des déterminations :

$$V_{\tilde{D^*}} = \beta(\mathbb{C}^\mu) = q \circ \underline{z^A}(\mathbb{C}^\mu)$$

On peut tout d'abord écrire la décomposition de Dunford de la matrice A, ie :

$$A = S + N$$

avec S diagonalisable et N nilpotente commutant.
À conjugaison près (ce qui revient à faire un changement de base dans V_1), on peut supposer que :

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & \lambda & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \nu & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & \nu \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & (0) & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & 0 & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & (0) & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Comme N est une matrice nilpotente (il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $N^m = 0$) et commutant avec S, on a :

$$\underline{z^A} = \underline{z^S z^N} = \underline{z^S}\exp(N\underline{\log}(z)) = \underline{z^S}\left(1 + N\underline{\log}(z) + \ldots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\underline{\log}(z)^{m-1}\right)$$

Par conséquent les coefficients de $\underline{z^A}$, et par suite les composantes de tous les vecteurs de la forme $\underline{z^A}(v)$ pour $v \in \mathbb{C}^\mu$, sont de la forme :

$$(\underline{z^A}(v))_i = \underline{z^{\alpha_i}} Q_i(\underline{\log}(z))$$

où α_i est une valeur propre de A et Q_i est un polynôme à coefficients constants.
Finalement, on obtient :

$$q \circ \underline{z^A}(v) = \sum_i g_i(z) \underline{z^{\alpha_i}} Q_i(\underline{\log}(z))$$

qui est bien de la forme (3) où les $g_i \in \mathcal{O}(D^*)$ sont les composantes de q définies ci-dessus.
Il reste maintenant à considérer le cas où f est à croissance modérée près de l'origine.
Dans ce cas, les fonctions b_i sont à croissance modérée tout comme les fonctions $\underline{z^{-A}}$. Il en résulte que les composantes g_i de $q = \beta \circ \underline{z^{-A}}$ sont à croissance modérée près de l'origine. Autrement dit, les g_i sont des fonctions méromorphes, alors on peut les supposer holomorphes en 0 en soustrayant aux α_i des entiers positifs ad hoc.□

Remarque : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit Y un sous-ensemble de points isolés de U. On peut définir d'une façon analogue la notion de fonction analytique multiforme sur $U \backslash Y$ de détermination finie et à croissance modérée près de Y. Une telle fonction est appelée fonction de classe de Nilsson sur U.
Nous étudierons plus précisément ces fonctions dans la partie suivante.

2.3 Équation différentielle à points singuliers réguliers

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On considère l'équation :

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu} f + a_1(z) \frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}} f + \ldots + a_\mu(z) f = 0 \tag{4}$$

Sur cette équation, on a les résultats suivant (qui ne seront pas démontrés ici) :

1. Si tous les a_i sont holomorphes sur U, l'ensemble des solutions locales holomorphes de (4) forme un faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimensions μ.
2. Si les a_i sont méromorphes sur U, le théorème de Fuchs nous dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de (4) soient des fonctions à croissance modérée au voisinage d'un pôle des a_i est que ce pôle soit un point singulier régulier de (4), ie l'ordre du pôle a_i est au plus égal à i.

Inversement, on a le résultat qui suit :

Proposition 2.2 *Étant donné un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$:*

1. *si $V \subset \mathcal{O}_U$ est un faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimensions μ, alors il existe une et une seule équation différentielle de la forme (4) avec les a_i méromorphes dans U telle que V coïncide en dehors des pôles de a_i au faisceau des solutions locales de (4).*
2. *si $V \subset \mathcal{O}_{U^*}$ où $U^* = U \setminus Y$ avec Y un ensemble de points isolés de U et si de plus toutes les sections de V sont à croissance modérée au voisinage des points de Y, alors V est le faisceau des solutions d'une et une seule équation de la forme (4) avec les a_i méromorphes dans U et les points de Y sont les points singuliers réguliers de (4).*

Remarque : Les pôles de a_i dans la première assertion de la proposition correspondent aux zéros des sections de V.

Exemple : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe U de $\mathbb{C}$ telle que f a un zéro d'ordre k en z_0, ie :

$$f(z) = (z - z_0)^k u(z)$$

avec $u(z_0) \neq 0$.
Alors f est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{df}{dz}(z) + a_1(z) f(z) = 0$$

où
$$a_1(z) = -\frac{k}{(z-z_0)} - \frac{du}{dz}(z)\frac{1}{u(z)}$$
En effet :
$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{d}{dz}((z-z_0)^k u(z)) = k(z-z_0)^{k-1}u(z) + (z-z_0)^k \frac{d}{dz}u(z)$$
et on doit avoir :
$$\frac{df}{dz} = -a_1(z)f(z) = -a_1(z)(z-z_0)^k u(z)$$
D'où :
$$-a_1(z) = \frac{df}{dz}(z)\frac{1}{(z-z_0)^k u(z)} = \frac{k}{(z-z_0)} + \frac{du}{dz}(z)\frac{1}{u(z)}$$
Ici la fonction a_1 possède un pôle en z_0.

Remarque : La fonction $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ est solution de l'équation différentielle :
$$\frac{df}{dz} + \frac{1}{z^2}f = 0$$
Ici la fonction $a_1(z)$ admet un pôle d'ordre 2, donc le pôle n'est pas un point singulier régulier, on ne peut donc pas appliquer la proposition ici.

Démonstration :

Unicité

Si on considère deux équations de la forme (4) qui admettent les mêmes solutions. Alors les solutions de ces deux équations seraient aussi solution de la soustraction des deux équations, or la soustraction de deux équations de la forme (4) donne une équation d'ordre $\mu - 1$, ce qui contredit le fait que les solutions doivent appartenir à l'espace vectoriel V de dimension μ.

Existence

Montrons l'existence de l'équation différentielle de la forme (4) associée au faisceau V.

Démonstration de l'assertion 1 :
Soit $(b_1, \ldots, b_\mu)$ une base de V sur un revêtement $\tilde{U}$ de U.
Soit $W(b_1, \ldots, b_\mu)$ le wronskien des b_i, ie :
$$W(b_1, \ldots, b_\mu) = \det \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & \ldots & b_\mu \\ b_1' & \ldots & \ldots & b_\mu' \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^{(\mu-1)} & \ldots & \ldots & b_\mu^{(\mu-1)} \end{pmatrix}$$
Comme les b_i sont linéairement indépendants, alors $W(b_1, \ldots, b_\mu)$ ne s'annule pas identiquement sur $\tilde{U}$.
D'autre part, si f est une section de V, alors f dépend linéairement de $b_1, \ldots, b_\mu$ donc le wronskien $W(f, b_1, \ldots, b_\mu)$ est identiquement nul sur $\tilde{U}$, autrement dit f est une solution de l'équation :
$$\frac{W(f, b_1, \ldots, b_\mu)}{W(b_1, \ldots, b_\mu)} = 0$$
qui est bien une équation du type (4). Les coefficients a_i de cette équation sont même des fonctions uniformes sur U.
En effet, si on développe le déterminant définissant $W(f, b_1, \ldots, b_\mu)$ par rapport à la première colonne, on obtient :
$$W(f, b_1, \ldots, b_\mu) = f \det \begin{pmatrix} b_1' & \ldots & \ldots & b_\mu' \\ b_1'' & \ldots & \ldots & b_\mu'' \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^{(\mu)} & \ldots & \ldots & b_\mu^{(\mu)} \end{pmatrix} - \frac{df}{dz} \det \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & \ldots & b_\mu \\ b_1^{(3)} & \ldots & \ldots & b_\mu^{(3)} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^{(\mu)} & \ldots & \ldots & b_\mu^{(\mu)} \end{pmatrix} + \ldots + (-1)^{\mu+1} W(b1, \ldots, b_\mu)$$

Ainsi en divisant par $W(b1, \dots, b_\mu)$ et en multipliant par $(-1)^{\mu+1}$, on obtient bien une équation de la forme (4) où les fonctions a_i sont définies par :

$$a_i(z) = (-1)^{\mu+1+i+1} \det \begin{pmatrix} b_1 & \dots & \dots & b_\mu \\ b'_1 & \dots & \dots & b'_\mu \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^{(\mu)} & \dots & \dots & b_\mu^{(\mu)} \end{pmatrix}$$

où on a enlevé la ligne $(b_1^{(i)} \dots b_\mu^{(i)})$ dans la matrice.
Maintenant sous l'action d'un élément $[\gamma] \in \Pi_1(U, x_0)$, chaque ligne de la matrice :

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & \dots & b_\mu \\ b'_1 & \dots & \dots & b'_\mu \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^{(\mu)} & \dots & \dots & b_\mu^{(\mu)} \end{pmatrix}$$

où on a enlevé la ligne $(b_1^{(i)} \dots b_\mu^{(i)})$, est multipliée par une matrice à coefficients constants M_γ (la matrice de monodromie correspondant à $[\gamma]$), donc les mineurs définissant les a_i sont multipliés par $\det M_\gamma$.
Il en résulte que les a_i, qui sont les quotients de tels mineurs, sont invariants par rapport à $\Pi_1(U, x_0)$, ie sont des fonctions uniformes sur U. De plus, les pôles éventuels des a_i proviennent des zéros de $W(b_1, \dots, b_\mu)$.

Démonstration de l'assertion 2.
Supposons que les b_i sont à croissance modérée près de Y, alors les dérivées des b_i sont aussi à croissance modérée près de Y (c'est une conséquence de l'expression de f que nous avons vu dans la démonstration du théorème précédent).
Donc $W(z) = W(b_1, \dots, b_\mu)$ est une fonction à croissance modérée car somme finie de fonctions à croissance modérée.
D'après ce qu'on vient de faire, sous l'action de $[\gamma]$, où γ est un lacet tournant autour d'un point isolé de $z_0 \in Y$, $W(z)$ est multiplié par le déterminant de la matrice de monodromie définie par γ, ie M_γ. Ce qui montre qu'on peut écrire dans un voisinage de z_0 :

$$W(z) = (z - z_0)^\alpha u(z)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et u holomorphe en z_0 et $u(z_0) \neq 0$ (il suffit d'effectuer un développement en série entière de $W(z)$ et de prendre en compte que $W(z0) = 0$).
Par conséquent les zéros de $W(z)$, et par suite, les pôles de a_i, ne s'accumulent pas en z_0. $\square$

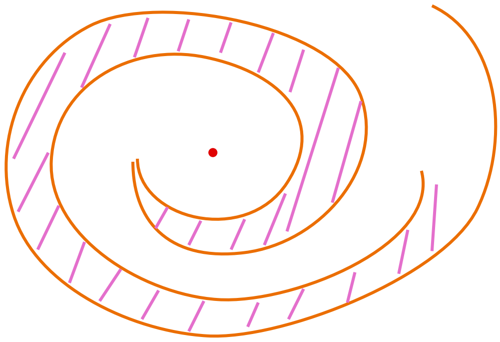
3 Fonctions de classe de Nilsson à plusieurs variables

3.1 Définition de fonctions de classe de Nilsson

La définition donnée précédemment dans le cas d'une variable peut se généraliser comme suit.

Définition 3.1 *On dit que f est de classe de Nilsson sur X si f est une fonction analytique multiforme de détermination finie sur $X \setminus Y$ et à croissance modérée le long de Y où Y est une hypersurface complexe de X.*

Problème : pour comprendre cette définition il faut savoir ce que veut dire à "croissance modérée". La difficulté réside ici dans le fait de généraliser la notion de secteur angulaire qui nous a servi à définir la notion de fonction à croissance modérée dans le cas d'une seule variable.
La généralisation de secteur angulaire par un ouvert simplement connexe de $X \setminus Y$ relativement compact dans X s'avère inadéquate même dans le cas d'une seule variable.
Par exemple, il existe dans $\mathbb{C}$ dans bandes simplement connexes relativement compactes spiralant autour de l'origine telle que les fonctions à croissance modérée près de l'origine dans le sens usuel n'admettent pas de majoration par une puissance de $|z|$ dans ces bandes.



On a alors besoin de la définition suivante :

Définition 3.2 *Soit $X^* = X \setminus Y$.*

1. *Une fonction uniforme f définie sur n'importe-quelle partie P^* de X^* est dite à croissance modérée le long de Y si pour tout ouvert assez petit U de X tel que $Y \cap U$ soit défini par une équation de la forme $g(x) = 0$ où g est une fonction analytique dans U, alors il existe deux réels N et c tels que :*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|g(x)|^N} \quad \text{sur } P^* \cap U, \text{ avec } c > 0. \tag{5}$$

2. *Soit f une fonction analytique multiforme sur X. On dit que f est à croissance modérée le long de Y si chaque détermination de f est à croissance modérée le long de Y au sens de (5) sur toute partie simplement connexe de la forme $P^* = P \setminus Y$ où P est une partie analytique compacte d'un ouvert de X.*

Remarques : Dans toute la suite, on se restreindra au cas où Y est un diviseur à croisements normaux.

Définition 3.3 *Un diviseur Y dans X est dit à croisements normaux si $\forall x_0 \in X$, il existe un voisinage U de x_0 et un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_m$ sur U tels que :*

$$X \cap Y = \{z \in U; z_1 \ldots z_m = 0\}$$

3.2 Étude locale des fonctions de classe de Nilsson

D'après la remarque faite ci-dessus, on peut ramener l'étude locale des fonctions de classe de Nilsson au cas où :
- $X = D^n$;
- $Y = \{z \in D^n; z_1 \ldots z_m = 0\}$.

On a alors :

$$X^* = X \setminus Y = (D^*)^m \times D^{n-m} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n; 0 < |z_i| < 1, \forall\, 1 \leq i \leq m, |z_i| < 1, \forall\, m+1 \leq i \leq n\}$$

Soit f une fonction analytique multiforme sur X^*.
Soit $V_{\tilde{X}^*}$ l'espace vectoriel engendré par les déterminations de f considérées comme fonctions sur un revêtement de X^*.
Soit $b = (b_1, \ldots, b_\mu)$ une base de $V_{\tilde{X}^*}$ qui sert à identifier $V_{\tilde{X}^*}$ à $\mathbb{C}^\mu$.

On va reprendre le raisonnement déjà effectué dans le cas d'une seule variable.
La seule différence est que le groupe fondamental de X est maintenant engendré par m lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ autour de l'origine dans les m premiers plans de coordonnées respectivement.
On a toujours :

$$[\gamma_i](b) = T_i \circ b = b \circ M_i$$

où T_i (respectivement M_i) est la transformation (respectivement la matrice) de monodromie correspondant à $[\gamma_i]$.

Comme les lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ commutent entre eux, il en est de même pour les matrices M_i. Ils existent donc des matrices A_i (par surjectivité de l'exponentielle) commutant entre elles, telles que :

$$M_i = \exp(2i\pi A_i) \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

Considérons alors les fonctions multiformes à valeurs matricielles :

$$\underline{z_i^{A_i}} = \exp(A_i \underline{\log}(z_i))$$

En effectuant le prolongement analytique le long de γ_j pour $1 \leq j \leq m$, on obtient de la même façon que dans le cas à une variable :

$$[\gamma_j](\underline{z_i^{A_i}}) = [\gamma_j](\exp\left(A_i \underline{\log}(z_i)\right)) = \begin{cases} \underline{z_i^{A_i}} M_i & \text{si } j = i\,; \\ \underline{z_i^{A_i}} & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

D'autre part, chaque matrice $\underline{z_i^{-A_i}}$ définit un automorphisme du faisceau $\mathcal{O}^{\mu}_{\tilde{X}^*}$. On a donc un homomorphisme q du faisceau $\mathcal{O}^{\mu}_{\tilde{X}^*}$ dans le faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{X}^*}$ en posant :

$$q = \beta \circ \underline{z_1^{-A_1}} \circ \ldots \circ \underline{z_m^{-A_m}}$$

où β est l'homomorphisme du faisceau $\mathcal{O}^{\mu}_{\tilde{X}^*}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}^*}$ défini par :

$$\beta(g_1, \ldots, g_\mu) = \sum_{i=1}^{\mu} g_i b_i$$

En appliquant q à un μ-uplet de fonctions analytiques uniformes sur $\tilde{X}^*$ et en effectuant les prolongements analytiques le long de chaque γ_i, on obtient :

$$\begin{aligned} [\gamma_i](q(g_1, \ldots, g_\mu)) &= \gamma_i(\beta)\gamma_i(\underline{z_1^{-A_1}}) \ldots \gamma_i(\underline{z_m^{-A_m}})(g_1, \ldots, g_\mu) \\ &= \beta M_i M_i^{-1} \underline{z_1^{-A_1}} \ldots \underline{z_m^{-A_m}}(g_1, \ldots, g_\mu) \\ &= \beta \underline{z_1^{-A_1}} \ldots \underline{z_m^{-A_m}}(g_1, \ldots, g_\mu) \\ &= q(g_1, \ldots, g_\mu) \end{aligned}$$

q définit donc un homomorphisme de $\mathcal{O}^{\mu}_{\tilde{X}^*}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}^*}$.
En particulier, l'image g_i de la section constante e_i, e_i étant le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^\mu$, est une fonction analytique uniforme sur $\tilde{X}^*$.

On peut voir d'autre part, en décomposant successivement les matrices $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1$ selon Dunford, que chaque composante du vecteur $\underline{z_1^{A_1}} \ldots \underline{z_m^{A_m}}(v)$ pour $v \in \mathbb{C}^\mu$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_k \underline{z_1^{\alpha_{1,i,k}}} \ldots \underline{z_m^{\alpha_{m,i,k}}} Q_{i,k}(\underline{\log}(z_1), \ldots, \underline{\log}(z_m))$$

où $\alpha_{1,i,k}, \ldots, \alpha_{m,i,k}$ sont des valeurs propres de $A_1, \ldots, A_m$ respectivement et les $Q_{i,k}$ sont des polynômes de m variables à coefficients constants.

En reportant ces expressions dans la relation :

$$V_{\tilde{X}^*} = \beta(\mathbb{C}^\mu) = q \circ \underline{z_1^{A_1}} \ldots \underline{z_m^{A_m}}(\mathbb{C}^\mu)$$

on obtient :

$$q \circ \underline{z_1^{A_1}} \ldots \underline{z_m^{A_m}}(v) = \sum_{i=1}^{\mu} g_i \sum_k \underline{z_1^{\alpha_{1,i,k}}} \ldots \underline{z_m^{\alpha_{m,i,k}}} Q_{i,k}(\underline{\log}(z_1), \ldots, \underline{\log}(z_m)) \tag{6}$$

Dans le cas où f est à croissance modérée (ie tous les b_i sont à croissance modérée), chaque $q(v)$ pour $v \in \mathbb{C}$ est encore à croissance modérée car les $\underline{z_i^{-A_i}}$ le sont.
En particulier, les g_i sont à croissance modérée et on peut les supposer holomorphes sur X en soustrayant, si besoin est, aux exposants $\alpha_{j,i,k}$ des entiers positifs ad hoc.

On a donc prouver :

Lemme 3.1 *Une fonction analytique multiforme sur $\tilde{X}^*$ est de détermination finie si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme (6) où les g_i sont des fonctions holomorphes sur X^*.*
De plus, f est à croissance modérée si et seulement si les fonctions g_i dans l'expression (6) peuvent être choisies comme des fonctions holomorphes sur X.

Remarque : On peut raffiner un peu le lemme afin de pouvoir parler de l'unicité du développement (6).
En effet en écrivant les termes $Q_{i,k}$ explicitement, on peut développer une fonction analytique multiforme sur $\tilde{X}^*$ de détermination finie sous la forme :

$$f(z) = \sum_{(\alpha,p)} g_{\alpha,p}(z)\underline{z_1^{\alpha_1}}\dots\underline{z_m^{\alpha_m}}\underline{\log}^{p_1}(z_1)\dots\underline{\log}^{p_m}(z_m) \tag{7}$$

où $g_{\alpha,p} \in \mathcal{O}(\tilde{X^*})$ et la sommation est étendue à un sous-ensemble fini de $\mathcal{R} \times \mathbb{Z}_+^m$, $\mathcal{R}$ étant une famille fixée de représentants de $\mathbb{C}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.
Si, en plus, f est à croissance modérée, les $g_{\alpha,p}$ peuvent être choisies comme des fonctions méromorphes sur X.

Démonstration :
Montrons que le développement (7) est unique.
On remarque tout d'abord que si une fonction à croissance modérée admet un développement de la forme (7) avec $g_{\alpha,p} \in \mathcal{O}(X^*)$, alors les $g_{\alpha,p}$ sont des fonctions méromorphes sur X d'après le lemme précédent.
Pour montrer l'unicité de la forme (7), nous allons faire une récurrence sur m la dimension. Pour cela, nous allons faire le cas où $m = 1$ puis démontrer que la somme algébrique E des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$:

$$E_{\alpha,p} = \{g(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z); g \in \mathcal{O}(X^*)\}$$

où $p \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant une famille fixée de représentant de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, est une somme directe.
Posons :

$$E_\alpha = \sum_{p\in\mathbb{Z}_+} E_{\alpha,p}$$

avec $\alpha \in \mathcal{R}$.
Alors chaque E_α est contenu dans le sous-espace F_λ des vecteurs propres généralisés de la transformation de monodromie γ dans E correspondant à la valeur propre $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$, ie le sous-espace des vecteurs $v \in E$ annulés par une puissance de $(\gamma - \lambda id)$.
En effet, si $e(z) := \sum_{p=0}^k g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z)$ est un élément de E_α on a :

$$\begin{aligned}(\gamma - \lambda\mathrm{id})g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z) &= g_p(z)\exp(2i\pi\alpha)\,\underline{z^\alpha}(\underline{\log}(z) + 2i\pi)^p - \exp(2i\pi\alpha)\,g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z) \\ &= g_p(z)\exp(2i\pi\alpha)\,\underline{z^\alpha}((\underline{\log}(z) + 2i\pi)^p - \underline{\log}^p(z)) \\ &= g_p(z)\exp(2i\pi\alpha)\,\underline{z^\alpha}\sum_{j=0}^{p-1} C_p^j\underline{\log}^j(z)(2i\pi)^{p-j}\end{aligned}$$

Cette expression est de "degré" $p-1$ en $\underline{\log}(z)$. Par récurrence, on montre alors que $(\gamma-\lambda\mathrm{id})^p g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z)$ est de "degré" 0 en $\underline{\log}(z)$ et s'écrit donc sous la forme $\varphi(z)\underline{z^\alpha}$ avec φ une fonction uniforme. De fait :

$$\begin{aligned}(\gamma - \lambda\mathrm{id})^{p+1}g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z) &= (\gamma - \lambda\mathrm{id})\varphi(z)\underline{z^\alpha} \\ &= \varphi(z)\exp(2i\pi\alpha)\,\underline{z^\alpha} - \exp(2i\pi\alpha)\,\varphi(z)\underline{z^\alpha} \\ &= 0\end{aligned}$$

In fine :

$$(\gamma - \lambda\mathrm{id})^{k+1}e(z) = (\gamma - \lambda\mathrm{id})^{k+1}\sum_{p=0}^{k} g_p(z)\underline{z^\alpha}\underline{\log}^p(z) = 0$$

D'autre part :

$$E = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} E_\alpha \subset \sum_\lambda F_\lambda \subset E$$

(la première inclusion découlant de ce qu'on vient de montrer).
On doit donc avoir :

$$\sum_\lambda F_\lambda = E$$

et l'inclusion $E_\alpha \subset F_\lambda$ ne peut être stricte (car sinon $E \subsetneq E$). Mais alors nécessairement la somme :

$$E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$$

est directe.

Ainsi il suffit de démontrer que la somme :

$$E_\alpha = \sum_{p \in \mathbb{Z}_+} E_{\alpha,p}$$

est directe.
On peut se ramener à démontrer que la somme :

$$E_0 = \sum_{p \in \mathbb{Z}_+} E_{0,p}$$

est directe.
En effet un élément $e \in E_\alpha$, ie s'écrivant sous la forme :

$$e = \sum_{p \in \mathbb{Z}_+} g_p(z) \underline{z^\alpha} \underline{\log}^p(z)$$

s'écrit de manière unique sous cette forme si et seulement si $\frac{e}{\underline{z^\alpha}}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\frac{e}{\underline{z^\alpha}} = \sum_{p \in \mathbb{Z}_+} g_p(z) \underline{\log}^p(z)$$

D'où le fait qu'on puisse se ramener à démontrer que la somme est directe pour E_0 (et donc au cas $\lambda = 1$).
Supposons à présent qu'il existe une relation de dépendance linéaire finie de la forme :

$$\sum_{p=0}^{k} g_p(z) \underline{\log}^p(z) = 0$$

avec les $g_k \neq 0$.

Commençons par remarquer que, pour $p \geq 0$:

$$\begin{aligned}(\gamma - \mathrm{id}) g_p(z) \underline{\log}^p(z) &= g_p(z)((\underline{\log}(z) + 2i\pi)^p - \underline{\log}^p(z)) \\ &= g_p(z) \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j \underline{\log}^j(z) (2i\pi)^{p-j}\end{aligned}$$

La chose importante est que cette dernière expression est de "degré" $p-1$ en $\underline{\log}(z)$. Ainsi, par récurrence on montre que $(\gamma - \mathrm{id})^p g_p(z) \underline{\log}^p(z)$ est de"degré" 0 en $\underline{\log}(z)$: c'est donc une fonction uniforme, et donc :

$$(\gamma - \mathrm{id})^{p+1} g_p(z) \underline{\log}^p(z) = (\gamma - \mathrm{id}) \circ (\gamma - \mathrm{id})^p g_p(z) \underline{\log}^p(z) = 0$$

Au final, on trouve donc que (il ne reste "que le terme en k") :

$$0 = (\gamma - \lambda \mathrm{id})^k \left(\sum_{p=0}^{k} g_p(z) \underline{\log}^p(z) \right) = k!(2i\pi)^k g_k(z)$$

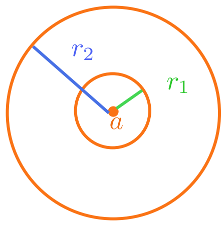
ce qui contredit le fait que $g_k(z) \neq 0$.
D'où le résultat voulu. □

4 Annexe : rappels sur les séries de Laurent

Soit V une couronne ouverte du plan, ie :

$$V = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z-a| < r_2\}$$

où $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.



Si f est une fonction holomorphe sur V et si $n \in \mathbb{Z}$, le théorème de Cauchy nous dit que :

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

est indépendante de $r \in]r_1, r_2[$.

Définition 4.1 *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Laurent de f au point a par la formule :*

$$c_n = \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

où $r_1 < r < r_2$.

Remarque : On a également :

$$c_n = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(a + r\exp(\theta)) \exp(-in\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

de sorte que les $c_n r^n$ soient les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f_r définie par $f_r(\theta) = f(r \exp(i\theta))$.

Définition 4.2 *La série $\sum c_n(z-a)^n$ s'appelle la série de Laurent de f au point a.*

Remarque : Si f est holomorphe dans tout le disque $D(a, r_2)$ alors les fonctions $z \longrightarrow \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ pour $n < 0$ sont holomorphes sur ce disque, donc $c_n = 0$ pour $n < 0$ d'après le théorème de Cauchy. De plus, pour tout $n \geq 0$, c_n est le n-ième coefficient de Taylor de f d'après la formule de Cauchy.

Théorème 4.1 *Soit f une fonction holomorphe sur une couronne V. On note par $\sum c_n(z-a)^n$ la série de Laurent de f au point a.*
Alors

1. *la série $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ converge normalement sur les compacts de $V_2 = \{|z-a| < r_2\}$;*
2. *la série $\sum_{n>0} c_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement sur tout ensemble du type $\{|z-a| \geq r\}$ avec $r > r_1$;*
3. *on a pour tout $z \in V$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Remarque : (Réciproque) Soit f une fonction définie sur une couronne V et supposons qu'on puisse écrire :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n$$

où $\sum_{n<0} d_n(z-a)^n$ et $\sum_{n\geq 0} d_n(z-a)^n$ convergent en tout point de V.
Alors la convergence des deux séries est uniforme sur tout compact de V, f est holomorphe et les d_n sont les coefficients de Laurent de f en a.

Références

[Pha74] F. Pham. *Introduction à l'étude des intégrales singulières et des hyperfonctions.* Hanoï singular seminar, 1974.