Plan top rempli

137 - BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE RÉEL DE DIMENSION FINIE, CONVEXITÉ. APPLICATIONS.

Cadre - E espace affine sur $\mathbb{R}$, de dimension finie

1 - BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE RÉEL DE DIMENSION FINIE [MER]

1-1 - DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Un système de points pondérés $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ est la donnée de n points $A_1, \dots, A_n$ de E et de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. À chaque système de points pondérés $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ on associe la fonction vectorielle de Leibniz

$f(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$. Deux cas se présentent.

→ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors $f(M) = f(O)$ pour tout point M, et f est une fonction constante

→ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$ donné

$f(M) = \vec{u} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{u}\right)$ et f est bijective.

Def - Soient n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Le barycentre du système de points pondérés $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ est l'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ce point G est aussi défini par la relation

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

où O désigne un point quelconque de E.

Thm - Soit G le barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$

1) Homogénéité des coefficients : G est aussi le barycentre de $A_1(\lambda\alpha_1), \dots, A_n(\lambda\alpha_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$

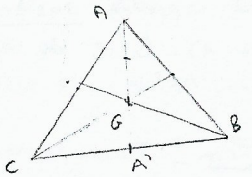
2) Commutativité : G est le barycentre de $A_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}), \dots, A_{\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(n)})$ où σ désigne une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_n$.

3) Associativité : Si $J \subset \mathbb{N}_n$ et si la somme $s = \sum_{i \in J} \alpha_i$ n'est pas nulle, alors G est le barycentre du système de points pondérés $\{A_i(\alpha_i)\}_{i \notin J}, g(s)$, où g désigne le barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i \in J}$.

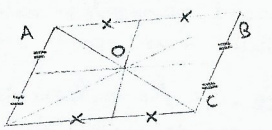
Def - L'isobarycentre des n points $A_1, \dots, A_n$ est le barycentre de ces n points affectés de coefficients tous égaux entre eux. L'isobarycentre du système formé par deux points A, B est appelé milieu du segment $[AB]$.

Applications

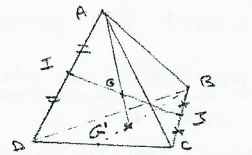
- les trois médianes d'un triangle concourrent en un point G situé au tiers de la base de chacune d'elle



- l'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme coïncide avec le milieu des diagonales, et appartient aux droites passant par le milieu de deux côtés opposés



- l'isobarycentre G des sommets d'un tétraèdre $ABCD$ est situé aux $3/4$ de la base de chacun des segments d'extrémités un sommet et le centre de gravité de la base opposée, et coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux de deux arêtes opposées.



- Le centre de gravité d'un système de points massiques (A_i, α_i) coïncide avec le barycentre de ce système. Soient deux points massiques $A(m_A)$ et $B(m_B)$ situés aux extrémités d'une tige de masse négligeable. Le barycentre G du système $\{A(m_A), B(m_B)\}$ est exactement le point où il faut placer un support S pour que la tige reste en équilibre.

1-2 - LIEN ENTRE SOUS-ESPACE AFFINE ET BARYCENTRATION

Thm - Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de E est égal à l'ensemble des barycentres de points de A.

Ex - L'espace affine engendré par deux points distincts A et B est la droite (AB).

- Si A, B et C sont 3 points non alignés, l'espace affine engendré par $\{A, B, C\}$ sera le plan (ABC)

Thm - Une partie non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentration.

1-3 - REPÉRAGE

Def - Soit E de dimension n. Un repère affine de E est une $(n+1)$-liste $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ de points affinement libre, ie tels que :

$\exists j \quad \{\overrightarrow{A_jA_i}\}_{i\neq j}$ est un système libre.

Def – Soient $\mathcal{R}=(A_0,A_1,\dots,A_n)$ un repère affine de E, et M un point de E. On appelle système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$ toute $(n+1)$-liste de réels $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ telle que M soit le barycentre de $A_0(\alpha_0)$, …, $A_n(\alpha_n)$. Le système est dit normalisé si $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i = 1$.

Thm – Deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. Le système de coordonnées barycentriques normalisé d'un point est unique.

Rq – Si A_0 milieu de $[A_1A_2]$, A_0 est barycentre de $A_0(1),A_1(0),A_2(0)$ et aussi de $A_0(0),A_1(1),A_2(1)$ et pourtant les 3-listes $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnelles.

Interprétation des coordonnées barycentriques en terme d'aires [TRU]

Soit ABC un triangle donné et M un point de son plan qui n'est situé sur aucune des droites (BC), (CA) ou (AB). On note α,β,γ les coordonnées barycentriques de M relatives à ABC. On a donc $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Def – l'aire algébrique du triangle MBC est son aire algébrique affectée du signe "+" s'il a la même orientation que le triangle ABC et du signe "–" dans le cas contraire.

Prop – Les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

Applications

- Soit $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit au triangle ABC sont a,b,c.
- $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ est un système de coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1_4_ APPLICATIONS

Thm – Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre [TER]

Prop – Soit $P(p,q,r)$ et $P'(p',q',r')$ distincts. Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite (PP') si et seulement si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0$ [TIS]

Prop – Soient deux droites $D(u,v,w)$ et $D'(u',v',w')$ de E. Posons $d=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$

a) D et D' ont un point commun unique ssi $d\neq 0$.

b) D et D' sont parallèles ssi $d=0$

Thm – Soient A,B,C trois points non alignés de P soit $A'\in(BC)$ $B'\in(AC)$ et $C'\in(AB)$, distincts respectivement de B, C et A. On considère $\delta = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}\,\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}\,\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$. Alors

a) A', B' et C' sont alignés ssi $\delta = 1$ (Thm de Ménélaüs)

b) les droites (AA'), (BB') et (CC') concourrent ou sont parallèles ssi $\delta = -1$ (Thm de Céva).

2_ CONVEXITÉ [TAU]

2_1_ Convexité, enveloppe convexe et points extrémaux

Def – Soit $a=(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de E et $B\in E$. On dit que B est combinaison convexe de a s'il existe une famille presque nulle $(t_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls vérifiant : $\sum_{i\in I} t_i = 1$ et $B = \sum_{i\in I} t_i A_i$

– Une partie A de E est dite étoilée en un de ses points M si [MN] est contenu dans A pour tout $N\in A$

– On dit que A est convexe si elle est étoilée en tous ses points.

Quelques résultats – Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

– Les sous-espaces et les boules sont convexes.

– Toute intersection de convexes l'est aussi.

– L'adhérence d'un convexe est convexe.

Def – L'enveloppe convexe d'une partie A de E, notée $Cv(A)$, est l'intersection de tous les convexes contenant A. C'est donc le plus petit convexe contenant A.

Prop – (Thm de Lucas) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Prop – Soit A une partie de E

(i) $Cv(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A

(ii) L'intersection des convexes fermés de E contenant A est $\overline{Cv(A)}$

(iii) Si A est convexe et bornée, on a $A = Cv(Fr(A))$

(iv) Si A est ouverte, $Cv(A)$ l'est aussi

Eidem, GéoAnal classique

Rq - L'enveloppe convexe d'une partie fermée n'est pas nécessairement fermée.
↳ $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy \geqslant 1\}$ et $Co(A) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\}$

Thm - (de Carathéodory) Soit A une partie de E. Tout élément de $Co(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A, avec $k \leqslant 1 + \dim E$

Cor - Soit A une partie non vide de E. Si A est compacte, alors $Co(A)$ est compacte.

Cor - Si A est bornée, $Co(A)$ est bornée et $\delta(A) = \delta(Co(A))$.

DVP 1

Application - Inégalité de Kantorovitch
Soit A matrice symétrique définie positive de valeurs propres $\lambda_n \leqslant \dots \leqslant \lambda_1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^4 \leqslant \langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$$

DVP 2

def - Soit A un convexe de E. On dit que $M \in A$ est un point extrémal de A si toute égalité $M = tP + (1-t)Q$ avec $t \in [0,1]$ et $P, Q \in A$, implique $M = P$ ou $M = Q$. L'ensemble des points extrémaux de A est noté $Extr(A)$.

Prop - Si $O \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $Extr[B'(O,r)] = S(O,r)$.

Prop - Soient A un convexe de E et $M \in A$. On a équivalence entre :
(i) $M \in Extr(A)$
(ii) $A \setminus \{M\}$ est convexe
(iii) Si M est combinaison convexe d'éléments de A, il est égal à l'un de ces éléments

Thm (de Krein-Milman) Pour tout convexe compact non vide A de E, on a $A = Co(Extr(A))$.

2-2- Résultats de séparation

Thm (de Hahn-Banach) - Soit A un ouvert convexe non vide et L un sous espace de E tel que $A \cap L = \emptyset$. Il existe un hyperplan H de E vérifiant $L \subset H$ et $A \cap H = \emptyset$.

def - Soient A, B des parties de E et H un hyperplan de E
(i) On dit que H sépare A et B si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par H.
(ii) On dit que H sépare strictement A et B si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces ouverts déterminés par H

Thm - Soient A, B des convexes non vides et disjoints de E.
(i) Si A est ouvert, il existe un hyperplan séparant A et B
(ii) Si A et B sont ouvert, il existe un hyperplan qui les sépare strictement
(iii) Si A est compact et B fermé, il existe un hyperplan séparant strictement A et B.
(iv) Si A et B sont fermés, il existe un hyperplan qui les sépare.

Rq - Si $E = \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R} \times \{0\}$, $B = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 ; xy \geqslant 1\}$. Il n'existe aucun hyperplan séparant strictement A et B.

2-3- Théorème de Helly et applications

lemme - Soient $A_1, \dots, A_s$ des convexes de E tels que $s-1$ quelconques d'entre eux aient une intersection non vide. Il existe des convexes compacts $B_1, \dots, B_s$ vérifiant $B_i \subset A_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, et tels que $s-1$ quelconques d'entre eux aient une intersection non vide.

Soit $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Si J est un sous-ensemble de I, on note $\mathcal{F}_J$ l'intersection des A_j pour $j \in J$.

Thm (de Helly) - Soit $n = \dim E$. Soient I un ensemble contenant au moins $n+1$ éléments et $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de E vérifiant $\mathcal{F}_J \neq \emptyset$ pour toute partie J de I de cardinal $n+1$. Si les A_i sont compacts ou si I est fini, on a $\mathcal{F}_I \neq \emptyset$.

Cor (Thm de Kirchberger) - Soient A et B des parties finies non vides de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$ et $\mathrm{card}(A \cup B) \geqslant n+1$, où $n = \dim E$. On suppose l'existence, pour toute partie $P \subset A \cup B$ de cardinal $n+2$, d'un hyperplan séparant strictement les ensembles $A \cap P$ et $B \cap P$. Alors il existe un hyperplan séparant strictement A et B.

Cor - Soit $\mathcal{F} = \{I_1, \dots, I_p\}$ une famille finie d'intervalles non vides et parallèles d'un plan euclidien E, trois quelconques d'entre eux ayant une sécante commune. Alors $I_1, \dots, I_p$ ont une sécante commune.

lemme - Soit A une partie de E, $P \in E \setminus A$ et $Q \in A$. On suppose que A est étoilé en Q et que $PQ = d(P, A)$. Alors l'hyperplan H contenant Q et de direction orthogonale à $\overrightarrow{PQ}$ sépare A et $\{P\}$.

Thm (de Krasnosel'skii) - Soit A un compact de E tel que, pour tous $M_1, \dots, M_{n+1} \in A$, où $n = \dim E$, il existe $P \in A$ vérifiant $[P, M_i] \subset A$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Alors A est étoilé en au moins un de ses points.

Livres utilisés

Géométrie, Patrice Tauvel [TAU]

Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier [MER]

Géométrie affine, projective
et euclidienne, Claude Tisseron [TIS]

Géométrie élémentaire, Bernard Truffault [TRU]