Module LEFO

Cours: Dimitri Petritis

2010

Table des matières

Chapitre 1

Espaces $\mathcal{L}^p$

I Généralités

Lemme 1.1
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q > 0$ *conjugués. Alors* $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Définition 1.1 (Norme $\mathcal{L}^p$)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f \in m\mathcal{X}$. *On pose alors, pour* $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Proposition 1.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soient $f, g \in m(\mathcal{X}; \mathbb{R})$.
Soit $p \geq 1$.
Alors :

(i) $f = 0 \quad \mu\text{-}p.p \iff \|f\|_p = 0$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\|_p = \alpha \|f\|_p$

(iii) *(a) Si* $|f| \leq |g| \quad \mu\text{-}p.p$ *alors* $\|f\|_p \leq \|g\|_p$

  (b) Si $|f| = |g| \quad \mu\text{-}p.p$ *alors* $\|f\|_p = \|g\|_p$

Proposition 1.2 (Inégalité de Hölder)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soient $f, g \in m(\mathcal{X}; \mathbb{R})$.
Soient $p, q > 1$ *deux réels conjugués.*
Alors :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

☞ Plus généralement, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 1.3 (Inégalité de Minkowski)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soient $f, g \in m(\mathcal{X}; \mathbb{R})$.
Soit $p \geq 1$.
Alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Définition 1.2 (Espaces $\mathcal{L}^p$)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
On pose $\mathcal{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu; \mathbb{R}) = \{f \in m\mathcal{X} \mid \|f\|_p < \infty\}$.

Proposition 1.4 (Propriétés des espaces $\mathcal{L}^p$)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \in [1, +\infty)$. *Alors :*

(i) $(\mathcal{L}^p, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v*

(ii) $(\mathcal{L}^p, \|.\|_p)$ *est un espace semi-normé.*

(iii) $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow (f \in m\mathcal{X} \quad et \quad |f|^p \in \mathcal{L}^1) \Leftrightarrow (f \in m\mathcal{X} \quad et \quad |f| \in \mathcal{L}^p)$

(iv) $Si \begin{cases} f \in \mathcal{L}^p \\ g \in m\mathcal{X} \\ f = g \ \mu - p.p \end{cases} \quad alors\ g \in \mathcal{L}^p$

(v) $Si \begin{cases} f \in \mathcal{L}^p \\ g \in m\mathcal{X} \\ |f| \leq |g| \ \mu - p.p \end{cases} \quad alors\ f \in \mathcal{L}^p$

(vi) *Si* $f, g \in \mathcal{L}^p$ *alors* $\sup(f,g), \inf(f,g), f^+, f^- \in \mathcal{L}^p$

(vii) $Si \begin{cases} f \in \mathcal{L}^p \\ g \in \mathcal{L}^q \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \end{cases} \quad alors\ fg \in \mathcal{L}^r$

II Suites dans $\mathcal{L}^p$

Proposition 1.5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$.
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions telle que :*

(i) *Les* $f_n \in \mathcal{L}^p$

(ii) $fn \longrightarrow f \quad \mu{-}p.p$

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^p,\ g \geq 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g \quad \mu{-}p.p$

Alors :

1. $f \in \mathcal{L}^p$
2. $f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}^p} f$

Corollaire 1.5.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions telle que :*

(i) *Les* $f_n \in \mathcal{L}^1$

(ii) $\sum f_n$ *converge vers* f μ*-p.p*

(iii) $f \in m\mathcal{X}$

(iv) $\exists g \in \mathcal{L}^p,\ g \geq 0$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N},\ |\sum_{n=0}^{k} f_n| \leq g \quad \mu{-}p.p$

Alors :

1. $f \in \mathcal{L}^p$
2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \right) = \int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu$$

Proposition 1.6 (Fatou)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$ *réel et soit* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p\mathbb{N}}$ *convergeant* μ*-p.p vers* $f \in m\mathcal{X}$.
Si $\|f_n\|_p \nrightarrow \infty$, *alors* $f \in \mathcal{L}^p$.

Corollaire 1.6.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$ *réel et soit* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p\mathbb{N}}$ *convergeant en norme* $\mathcal{L}^p$ *vers* f.
Alors $\|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$.

✖ La réciproque est **fausse** !

☞ Il n'y a dans le cas général aucune implication entre convergence $\mathcal{L}^p$ et μ-p.p.

Proposition 1.7 (Fischer-Riesz)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$ *réel et soit* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy.*
Alors :

(i) $(f_n)_n$ *possède une sous-suite* $(f_{\varphi(n)})_n$ *qui converge* μ*-p.p vers* $f \in \mathcal{L}^p$.

(ii) $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0.$

Ainsi, $(\mathcal{L}^p, \|.\|_p)$ *est complet.*

Corollaire 1.7.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$ *réel et soit* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p\mathbb{N}}$ *convergeant en norme* $\mathcal{L}^p$ *vers* f.
Alors : $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante tel que* $f_\varphi(n) \longrightarrow f \mu$*-p.p*

Lemme 1.2
Soient $0 \leq a \leq b$ *et soit* $p \geq 1$. *Alors* $(b-a)^p \leq b^p - a^p$

Proposition 1.8 (Beppo-Levi)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $p \geq 1$ *réel et soit* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p\mathbb{N}}$ ***monotone*** *telle que* $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$.
Alors :

1. $\exists g \in \mathcal{L}_p$ *tel que* $\left\{ \begin{array}{l} f_n \longrightarrow g\mu - p.p \\ f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}^p} g \end{array} \right.$
2. *Si* $\exists f \in m\mathcal{X}$ *tel que* $f_n \longrightarrow f\mu - p.p$ *alors*
   (a) $f \in \mathcal{L}^p$
   (b) $f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}^p} f$

III Cas des mesures finies

Proposition 1.9
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(\mathbb{X}) < \infty$.
Soient $1 \leq p_1 \leq p_2$.
Alors :

(i) $\exists C > 0,\ \forall f \in m\mathcal{X},\ \|f\|_{p_1} \leq C\|f\|_{p_2}$

(ii) $\mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1}$

✖ Aucune inclusion n'est possible si $\mu(\mathbb{X}) = \infty$!

Corollaire 1.9.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(\mathbb{X}) < \infty$.
Soient $1 \leq p_1 \leq p_2$ *et soient* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^{p_2\mathbb{N}}$ *et* $f \in \mathcal{L}^{p_2}$.
Alors :

$$\left(\|f_n - f\|_{p_2} \longrightarrow 0\right) \Longrightarrow \left(\|f_n - f\|_{p_1} \longrightarrow 0\right)$$

Proposition 1.10
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(\mathbb{X}) < \infty$.
Soit $p \geq 1$.
Alors convergence uniforme implique convergence $\mathcal{L}^p$.

Chapitre 2

Résultats de densité

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{X}-$étagées (i.e prenant un nombre fini de valeurs), et $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}^1$. On rappelle que la mesure de $\{f \neq 0\}$ pour $f \in \mathcal{E}^1$ doit être finie.

Proposition 2.1
$\mathcal{E}^1$ est un s-e.v dense de $\mathcal{L}^p$ pour $p \in [1, \infty)$.

Définition 2.1 (Support, fonctions en escalier)
Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un e.v.n et F un e.v.
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow F$.
On appelle support de f l'ensemble $supp(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$. Si $supp(f)$ est compact, on dit que f est à support compact.
On appelle fonction en escalier toute fonction étagée à support compact, et on note Esc($\mathbb{R}$) l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 2.2
Soit $p \in [1, \infty)$. Sont alors denses dans $(\mathcal{L}^p, \|.\|_p)$:

1. *Esc($\mathbb{R}$)*
2. *L'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact.*
3. *L'ensemble $\mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ à support compact, pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Chapitre 3

Espaces L^p

Dans ce chapitre, $p \in [1, \infty)$.

Définition 3.1 (Espaces L^p)
On pose $K_p = \{f \in \mathcal{L}^p \quad | \quad \|f\|_p = 0\}$.
On définit ensuite l'ensemble quotient $L^p = \mathcal{L}^p / K_p$.

Définition 3.2 (Norme L^p)
Soit $F \in L^p$. *On pose alors* $\|F\|_p = \|f\|_p$, *où* $f \in F$.

✍ Cette quantité est bien définie car $f = 0 \quad \mu$−p.p $\Longleftrightarrow \|f\|_p = 0$.

Proposition 3.1
$(L^p, \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

✍ En particulier, $(L^2, \langle\, .\,,\, .\,\rangle)$ est un espace de Hilbert, où $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{X}} \bar{f} g d\mu$.

Chapitre 4

Espaces $\mathcal{L}^\infty$, L^∞

Définition 4.1 (Majorant essentiel)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable.*
Un majorant essentiel de f *est un* $m \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* $\mu(\{f > m\}) = 0$*.*

On note $M(f)$ l'ensemble des majorants essentiels de f. Notons que $M(f) \neq \emptyset$ car $\infty \in M(f)$.

Lemme 4.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré, avec* $\mu \neq 0$*.*
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable.*
Alors $M(f)$ *est un intervalle fermé de la forme* $[n_0, +\infty]$*.*

Définition 4.2 (Borne supérieure essentielle)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable.*
On appelle borne supérieure essentielle de f *la borne inférieure de* $M(f)$*. On le note essup(*f*), ou* $\|f\|_\infty$*.*

☞ En général, on note $\|f\|_\infty = \sup|f|$. Dans le cadre de ce cours, on noteras cette quantité $\|f\|_{\text{sup}}$ pour éviter les ambiguités. Considérer la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ pour se convaincre que ces deux quantités sont distinctes.

Définition 4.3 (Fonction essentiellement bornée)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable.*
f *est dite (*$\mu-$*) essentiellement bornée si* $\|f\|_\infty < \infty$*.*

Définition 4.4 (Espace $\mathcal{L}^\infty$)
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
On appelle $\mathcal{L}^\infty$ *l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur* $\mathbb{X}$*.*

Proposition 4.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $(f, g) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^\infty$*.*
Alors

(i) $fg \in \mathcal{L}^1$
(ii) $\int_{\mathbb{X}} |fg| d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ *[Inégalité de la moyenne]*

☞ On définit l'espace L^∞ de façon similaire au cas $p < \infty$ comme le quotient $\mathcal{L}^\infty / \{\|.\|_\infty = 0\}$.

Lemme 4.2
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $f : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable.*
Sont équivalents :

(i) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ |f| \leq \alpha\ \mu-p.p$

(ii) $\exists g : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée telle que* $f = g$ $\mu-p.p$

Proposition 4.2
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Alors :

(i) $(\mathcal{L}^\infty, \|.\|_\infty)$ *est un e.v semi normé complet.*

(ii) $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Chapitre 5

Dualité

I Cas de deux réels conjugués

Proposition 5.1
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soient p, q *deux réels conjugués.*
Soit $g \in L^q$.

Soit $\begin{array}{cccc} \varphi_g : & L^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_{\mathbb{X}} gf d\mu \end{array}$ *Alors :*

(i) $\varphi_g \in (L^p)'$.

(ii) $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ *est linéaire continue et* $\|\varphi\| = \|g\|_q < \infty$.

Corollaire 5.1.1
L'application $\varphi : L^q \longrightarrow (L^p)'$ *est une isométrie linéaire bijective.*

☞ **Bilan :** $L^q \cong (L^p)'$ si $p, q \in (1, \infty)$.

II Cas "$p = 1$"

Proposition 5.2
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $g \in L^\infty$.

Soit $\begin{array}{cccc} \varphi_g : & L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_{\mathbb{X}} gf d\mu \end{array}$ *Alors :*

(i) $\varphi_g \in (L^1)'$.

(ii) $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty$. *Il y a de plus égalité si* μ *est* $\sigma-$*finie.*

☞ **Bilan :** $L^1 \hookrightarrow (L^\infty)'$.

III Cas "$p = \infty$"

Proposition 5.3
Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $g \in L^1$.

Soit $\begin{array}{cccc} \varphi_g : & L^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_{\mathbb{X}} gf d\mu \end{array}$ *Alors :*

(i) $\varphi_g \in (L^\infty)'$.

(ii) $\|\varphi_g\| = \|g\|_1$.

☞ **Bilan :** $L^\infty \cong (L^1)'$.

IV Cas de la mesure de comptage κ

Théorème 5.4 (Hahn–Banach)
Soit $(\mathbb{V}, \|.\|)$ *un e.v.n et soit* $\mathbb{U}$ *un s-e.v de* $\mathbb{V}$.
Alors pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, *il existe* $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{C})$ *tel que* $\mathcal{V}|_{\mathbb{U}} = \mathcal{U}$ *et* $\|\mathcal{V}\| = \|\mathcal{U}\|$.

Dans la suite de ce cours, on noteras ℓ^p l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa)$, pour $p \in [1, \infty]$. Comme le seul $\kappa-$négligeable est le vide, il est immédiat que ℓ^∞ est l'ensemble des suites bornées et que $\|.\|_{\sup} = \|.\|_\infty$.

Proposition 5.5
L'application Φ *définie ci-après est une isométrie linéaire non surjective.*

$$\begin{array}{llllll} \Phi : & \ell^1 & \longrightarrow & (\ell^\infty)' & & \\ & v & \mapsto & \Phi(v) : & \ell^\infty & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} v_n x_n \end{array}$$

Chapitre 6

Mesures produit

I Espaces produits

Définition 6.1 (Tribu Produit)
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ *deux espaces mesurables.*
On appelle tribu produit de $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{Y}$ *la tribu* $\sigma(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

✍ On la note $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Remarquons que $A \times B = (A \times \mathbb{Y}) \cap (\mathbb{X} \times B)$ pour $A \subset \mathbb{X}$ et $B \subset \mathbb{Y}$. Dans la suite, on notera $\pi_{\mathbb{X}}$ et $\pi_{\mathbb{Y}}$ les projections canoniques dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Proposition 6.1
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ *deux espaces mesurables.*
Alors

(i) $\pi_{\mathbb{X}}$ *(resp.* $\pi_{\mathbb{Y}}$*) est* $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{X})-$*mesurable (resp.* $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Y})-$*mesurable).*
(ii) Si une tribu $\mathcal{F}$ *sur* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *rend* $\pi_{\mathbb{X}}$ *et* $\pi_{\mathbb{Y}}$ *mesurables alors* $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$.

☞ En résumé, la tribu produit est la plus petite tribu qui rend mesurable les projections canoniques.

Proposition 6.2
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ *et* $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ *des espaces mesurables.*
Soit $f = (f_{\mathbb{X}}, f_{\mathbb{Y}}) : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. *Alors :*

$$f \text{ est } (\mathcal{W}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})-\text{mesurable}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f_{\mathbb{X}} \text{ (resp. } f_{\mathbb{Y}}\text{) est } (\mathcal{W}, \mathcal{X})-\text{mesurable (resp. } (\mathcal{W}, \mathcal{Y})-\text{mesurable)}$$

Proposition 6.3
Soit $(\mathbb{X}, d)$ *et* $(\mathbb{X}, \hat{d})$ *des espaces métriques.*
On munit $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *de la distance* $\delta : ((x, y), (x', y')) \mapsto d(x, x') + \hat{d}(y, y')$.
Alors :

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{X}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$
(ii) Si $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont séparables, alors* $\mathcal{B}(\mathbb{X}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{Y}) = \mathcal{B}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$

Soit $C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. On pose alors, pour $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, $C_x = \{y \in \mathbb{Y} \mid (x, y) \in C\}$ et $C_y = \{x \in \mathbb{X} \mid (x, y) \in C\}$. On peut alors montrer que $C_x \in \mathcal{Y}$ et $C_y \in \mathcal{X}$.

Proposition 6.4 (Mesure Produit)
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ *deux espaces mesurés.*
On suppose que μ *et* ν *sont* $\sigma-$*finies.*
Alors

(i) Il existe une unique mesure $\sigma-$*finie* m *sur* $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$*, appelée mesure produit vérifiant que* $\forall A \in \mathcal{X},\ \forall B \in \mathcal{Y},\ m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
(ii) $\forall C in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y},\ m(C) = \int_{\mathbb{X}} \nu(C_x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \mu(C_y) d\nu(y)$.

✍ On la note $\mu \otimes \nu$.

II Théorèmes de Fubini

Proposition 6.5 (Fubini–Tonelli)
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ *deux espaces mesurés.*
On suppose que μ *et* ν *sont* $\sigma-$*finies.*
Alors, si $f \in m(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}; \overline{R}_+)$ *:*

(i) $\int_{\mathbb{Y}} f(., y) d\nu(y) \in m\mathcal{X}$ *et* $\int_{\mathbb{X}} f(x, .) d\mu(x) \in m\mathcal{Y}$

(ii)

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Proposition 6.6 (Fubini–Lebesgue)
Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ *deux espaces mesurés.*
On suppose que μ *et* ν *sont* $\sigma-$*finies.*
Alors, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ *:*

(i) Pour $\mu-$*presque tout* $x \in \mathbb{X}$, $f(x, .) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ *et pour* $\nu-$*presque tout* $y \in \mathbb{Y}$, $f(., y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii) $\int_{\mathbb{Y}} f(., y) d\nu(y) \in m\mathcal{X}$ *et* $\int_{\mathbb{X}} f(x, .) d\mu(x) \in m\mathcal{Y}$

(iii)

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Chapitre 7

Fonctions périodiques

I Généralités sur les fonctions périodiques

Définition 7.1 (Fonction périodique)
Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ *est dite périodique si* $\exists T > 0$ *(appelé période de* f*) tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

✍ On notera $\mathrm{Per}(T)$, ou $\mathrm{Per}(T, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques. Cet ensemble constitue un $\mathbb{K}-$e.v.

Lemme 7.1
Une fonction T*-périodique est totalement déterminée par sa restriction à un intervalle de la forme* $[x_0, x_0 + T)$.

☞ Par conséquent, si $f \in \mathrm{Per}(T)$, on l'identifie à $\hat{f} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathbb{T}$ est le tore $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \cong [O, T)$.

Lemme 7.2
Soit $\tilde{f} : [0, T) \longrightarrow \mathbb{K}$.
On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ *par* $f(x) = \tilde{f}(x + n_x T)$*, où* $n_x = \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid x + kT \geq 0\}$.
Alors $f \in Per(T)$.

Définition 7.2 (Groupe des périodes)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$.
On appelle groupe des périodes de f *l'ensemble* $\mathcal{P}_f = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)\}$.

Remarques :

1. Si $\mathcal{P}_f = \{0\}$, f n'est pas périodique.
2. Si $\mathcal{P}_f \neq \{0\}$, f est périodique.
3. Si $\mathcal{P}_f = \mathbb{R}$, f est constante.
4. $\mathcal{P}_f$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Lemme 7.3
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction périodique.*
Alors, l'une des propositions suivantes est vérifiée :

(i) $\mathcal{P}_f$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
(ii) Il existe un $T_0 > 0$*, appelé période fondamentale de* f*, tel que* $\mathcal{P}_f = T_0\mathbb{Z}$.

Lemme 7.4
Soit $f \in Per(T)$*, et soit* $a > 0$.
Alors $g : x \mapsto f(ax) \in Per\left(\dfrac{T}{a}\right)$.

☞ En conséquence, on peut se contenter de l'étude des fonctions $2\pi-$périodiques. Ainsi, dans le reste de ce cours, on se placeras sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, muni de la mesure à densité λ définie par $d\lambda(x) = \dfrac{dx}{2\pi}$. Ainsi, $\int_{\mathbb{T}} d\lambda = 1$.

II Coefficients de Fourier

Définition 7.3
Soit $\tilde{f} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$.

(i) $\tilde{f}$ est dite Lebesgue–intégrable si la fonction f $2\pi-$périodique obtenue par périodisation de f (cf. lemme 7.2) est intégrable localement (on note $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), i.e sur tout intervalle de longueur finie. On note $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. On a alors, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(x)d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)dx$$

(ii) On pose

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{T}} |\tilde{f}(x)|d\lambda(x)$$

.

(iii) On appelle polynôme trigonométrique sur $\mathbb{T}$ une fonction de la forme

$$P : t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

On appelle alors degré de P l'entier $\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid |n| \leq N,\ |c_n| + |c_{-n}| \neq 0\}$.

La proposition suivante découle de l'égalité ($\ell \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\ell t}dt = \delta_{\ell,0}$$

Proposition 7.1
Soit P un polynôme trigonométrique. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |n| \leq \deg(P),\ c_n = \int_{\mathbb{T}} P(t)e^{-int}d\lambda(t)$$

.

☞ Il y a donc correspondance bijective entre un polynôme trigonométrique et l'ensemble de ses coefficients.

Définition 7.4 (Série trigonométrique)
Une série trigonométrique est une série de fonctions $\sum_{(n\in\mathbb{Z})} f_n$ de la forme $f_n(t) = c_n e^{int}$.

Définition 7.5 (Coefficients de Fourier)
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.
On définit comme suit le $n-$ième coefficient de Fourier de f, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}d\lambda(t)$$

On pose de plus, $\forall t \in \mathbb{T}$, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int}, \quad S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$$

☞ les coefficients de Fourier sont bien définis dés que f est Lebesgue-intégrable. Par contre, contrairement à ce qu'affirmait Fourier, $S(f)$ n'est pas toujours bien définie. De plus, on peut avoir $S(f) \neq f$.

Proposition 7.2
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

(i) $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$

(ii) $\forall a \in \mathbb{C}$, $\widehat{af}(n) = a\widehat{f}(n)$

(iii) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$

(iv) *Si* $\tau \in \mathbb{T}$ *et* $f_\tau : f \mapsto f(t-\tau)$ *alors* $\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}$

(v) $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$

Corollaire 7.2.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ *et soit* $(f_j)_j \in L^1(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ *tel que* $\|f_j - f\|_1 \to 0$ *quand* $j \to \infty$*. Alors* $(\widehat{f_j})_j$ *converge uniformément vers* $\widehat{f}$*.*

Preuve : Découle de $|\widehat{f_j}(n) - \widehat{f}(n)| = |(\widehat{f_j - f})(n)| \leq \|f_j - f\|_1$

Proposition 7.3
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ *vérifiant* $\widehat{f}(0) = 0$*. On pose, pour* $x \in \mathbb{T}$, $F(x) = \int_0^x f(t)d\lambda(t)$*. Alors :*

1. F *est continue et* $2\pi-$ *périodique.*
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{F}(n) = \dfrac{1}{in}\widehat{f}(n)$

Chapitre 8

Convolution

Proposition 8.1 (Produit de convolution)
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Alors :

(i) Pour $\lambda-$presque tout $t \in \mathbb{T}$, la fonction $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$.

(ii) La fonction $f * g : t \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\lambda(\tau)$, appelée produit de convolution (ou convolée) de f et g, vérifie :

(a) $f * g \in L^1(\mathbb{T})$

(b) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

Preuve : Prouvons la dernière égalité.

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)e^{-int}d\lambda(t) \right) d\lambda(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}g(\tau)e^{-in\tau}d\lambda(t) \right) d\lambda(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{T}} g(\tau)e^{-in\tau} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}d\lambda(t) \right) d\lambda(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{T}} g(\tau)e^{-in\tau}\widehat{f}(n)d\lambda(\tau) \quad \text{par invariance de } \lambda \text{ par translation} \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

Remarque : Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, fg n'est pas nécessairement intégrable. Pour un contre exemple, poser $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Proposition 8.2
$*$ est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition sur $L^1(\mathbb{T})$.

Corollaire 8.2.1
$\left(L^1(\mathbb{T}), +, *, .\right)$ muni de $\|.\|_1$ est une algèbre de Banach commutative.

✖ Cette algèbre n'est *pas* unitaire !

Lemme 8.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : t \mapsto e^{int}$ définie sur $\mathbb{T}$.
Alors $\forall \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{T}$, $e_n * f(t) = \widehat{f}(n)e^{int}$.

Corollaire 8.2.2
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{T}$, on pose

$$k(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N},\, \forall t \in \mathbb{T},\ k * f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \widehat{f}(n) e^{int}$$

Chapitre 9

Identités approchées, sommabilité en norme

I Deux propriétés de $L^1(\mathbb{T})$

Proposition 9.1 (Invariance par translation)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\tau \in \mathbb{T}$. Alors :

(i) $f_\tau : t \mapsto f(t-\tau) \in L^1(\mathbb{T})$

(ii) $\|f_\tau\|_1 = \|f\|_1$

Proposition 9.2
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On définit $\varphi : \tau \mapsto f_\tau$ sur $\mathbb{T}$. Alors φ est continue sur $\mathbb{T}$.

Preuve : Procédons par densité. Commençons donc par supposer $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Alors, par théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $\mathbb{T}$, i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall s, t \in \mathbb{T}$, si $|s-t| \leq \delta$ alors $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$. Soit $\tau_0 \in \mathbb{T}$. Prenons $\tau \in \mathbb{T}$ tel que $|\tau - \tau_0| \leq \delta$. On a alors : $\forall t \in \mathbb{T}$, $|(t-\tau) - (t-\tau_0)| \leq \delta$ donc $|f(t-\tau) - f(t-\tau_0)| \leq \varepsilon$. Par suite

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}(|f(t-\tau) - f(t-\tau_0)|) = \sup_{\mathbb{T}}(|f_\tau - f_{\tau_0}|) \leq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 = 0$$

D'où la continuité de φ.

Supposons à présent $f \in L^1(\mathbb{T})$. Par densité, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, $\|f - g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or si τ, $\tau_0 \in \mathbb{T}$ on a

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1 \\ &= \|f-g\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g - f\|_1\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \limsup \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 \leq \varepsilon + \lim_{\tau\to\tau_0} \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 = \varepsilon$$

D'où le résultat.

II Identités approchées

Définition 9.1 (Identité approchée)
Une identité approchée, ou noyau de sommabilité, est une suite de fonctions $(k_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ tel que :

(i) Les k_n sont continues.

(ii) $\forall n \geq 0$, $\int_{\mathbb{T}} k_n d\lambda = 1$

(iii) $\exists C > 0, \forall n \geq 0, \ \|k_n\|_1 \leq C$

(iv)

$$\forall \delta \in (0, \pi), \ \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)| d\lambda(t) = 0$$

Remarque : Si on suppose les k_n positives, alors $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Lemme 9.1
Soient $\mathbb{B}$ un espace de Banach, $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{B}$ une application continue et $(k_n)_n$ une identité approchée. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0)\|_{\mathbb{B}} = 0$$

Proposition 9.3
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $(k_n)_n$ une identité approchée. Alors $k_n * f \to_{L^1} f$.

☞ Si on avait — ce qui n'est pas le cas — un véritable neutre e, on aurait $e*f = f$. La proposition 9.3 illustre ainsi l'appelation d' "identité approchée".

Définition 9.2 (Noyau de Fejér)
On appelle noyau de Fejér la suite de fonctions définies sur $\mathbb{T}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}$$

Remarque : $F_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \right)^2$. De plus, les F_n sont des polynômes trigonométriques.

Proposition 9.4
$(F_n)_n$ est une identité approchée.

Notation : Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_n(f) = F_n * f$.
☞ On a alors

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}$$

Proposition 9.5
L'ensemble $\mathcal{PT}(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques est dense dans $L^1(\mathbb{T})$.

Preuve : Soit $f \in L^1\mathbb{T}$. On a vu que $(\sigma_n(f))_n$ était une suite de polynôme trigonométriques. Or, d'après la proposition 9.3, comme $(F_n)_n$ est une identité approchée et que $\sigma_n(f) = F_n * f$, alors $(\sigma_n(f))_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{T})$, d'où le résultat.

Proposition 9.6 (Théorème d'unicité)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifiant que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = 0$. Alors $f = 0$.

Preuve : Sous ces hypothèses, la suite $(\sigma_n(f))_n$ est nulle sur $\mathbb{T}$. Or $(\sigma_n(f))_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{T})$, d'où le résultat.

Corollaire 9.6.1
Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$, alors $f = g$.

Proposition 9.7 (Riemann–Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors :

$$\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$$

.

PREUVE : Par densité : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{PT}(\mathbb{T})$, $\|f - P\|_1 \leq \varepsilon$. Or, si $|n| > \deg(P)$, alors $\widehat{P}(n) = 0$. Ainsi $|\widehat{f}(n)| = |\widehat{(f - P)}(n)| \leq \|f - P\|_1 \leq \varepsilon$ d'où le résultat.

Définition 9.3 (Noyau de Dirichlet)
On définit le noyau de Dirichlet comme la suite de fonctions définies sur $\mathbb{T}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

Remarques :

1. $D_n(t) = \left(\dfrac{\sin\left(\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \right)$
2. On a, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_n(f) = D_n * f$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{T}} D_n d\lambda = 1$ mais $(D_n)_n$ n'est *pas* une identité approchée.

III Espaces de Banach homogènes

Définition 9.4 (Espace de Banach homogène)
Un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ est un s-e.v $\mathbb{B} \subset L^1(\mathbb{T})$ muni d'une norme $\|.\|_{\mathbb{B}}$ vérifiant $\|.\|_{\mathbb{B}} \geq \|.\|_1$.

Exemples d'espaces de Banach homogènes :

1. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{T}} |f|$.
2. $\mathcal{C}^n(\mathbb{T})$ muni de $\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \sup_{\mathbb{T}} |f^{(k)}|$.
3. $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

Proposition 9.8
Soient $\mathbb{B}$ un espace de Banach homogène, $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$ et $f \in \mathbb{B}$. Alors :

(i) $f_\tau \in \mathbb{B}$ *et* $\|f_\tau\|_{\mathbb{B}} = \|f\|_{\mathbb{B}}$

(ii)
$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{\mathbb{B}} = 0$$

Proposition 9.9
Soient $\mathbb{B}$ un espace de Banach homogène, $(k_n)_n$ une identité approchée et $f \in \mathbb{B}$. Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \|k_n * f - f\|_{\mathbb{B}} = 0$$

Corollaire 9.9.1
Soient $\mathbb{B}$ un espace de Banach homogène. Alors $\mathcal{PT}(\mathbb{T})$ est debse dans $\mathbb{B}$.

PREUVE : $\|\sigma_n(f) - f\|_{\mathbb{B}}$ converge vers 0.

Exemple : Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.

Corollaire 9.9.2 (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Toute fonction continue $2\pi-$périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Chapitre 10

Convergence ponctuelle de $(\sigma_n(f))_n$

I Condition de Fejér

Lorsque l'on étudie $(\sigma_n(f))_n$ on rencontre principalement deux difficultés :

1. On sait que $(\sigma_n(f))_n$ converge vers f en norme $\|.\|_1$ mais on ne sait pas si elle converge simplement vers f.
2. Même dans les cas où on a convergence simple, on ne peut affirmer que la limite simple de $(\sigma_n(f))_n$ est f.

Proposition 10.1 (Fejér)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $t_0 \in \mathbb{T}$.

1. *Supposons que $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2}$ admette une limite $\check{f}(t_0) \in \mathbb{R}$ ($\check{f}$ est appelée régularisée de Dirichlet de f) [Condition de Fejér].*
   Alors :
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(t_0) = \check{f}(t_0)$$
   Notons que si f est continue en t_0, $\check{f}(t_0) = f(t_0)$.
2. *Si I est un intervalle* fermé *tel que $f \in \mathbb{C}^0(I)$, alors $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément sur I.*
3. *Si f est minorée (resp. majorée) par un réel m (resp. M), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f)$ est minorée par m (resp. majorée par M).*

Preuve : La preuve est basée sur le fait que $(F_n)_n$ est une identité approchée positive, paire et vérifiant que :

$$\forall \delta \in (0,\pi),\ \lim_n \left(\sup_{\delta \le t \le 2\pi-\delta} F_n(t) \right) = 0$$

Corollaire 10.1.1
Si t_0 est un point de continuité de $f \in L^1(\mathbb{T})$ est que $(S_n(f))_n$ converge simplement en t_0 vers $S_\infty(f)$, alors $S_\infty(f)(t_0) = f(t_0)$, i.e $(S_n(f))_n$ converge simplement en t_0 vers f.

II Affaiblissement de la condition de Fejér

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On pose $\psi : (t,h) \mapsto \dfrac{f(t+h)-f(t-h)}{2}$. La condition de Fejér en $t_0 \in \mathbb{T}$ s'écrit alors :

$$\lim_{h\to 0} \psi(t_0,h) \text{ existe dans } \mathbb{R} \tag{10.1}$$

On définit la condition de Fejér affaiblie (en $t_0 \in \mathbb{T}$) suivante :

$$\exists g \in L^1(\mathbb{T}),\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\psi(t_0,\tau) - g(t_0)| d\tau = 0 \tag{10.2}$$

Alors :

1. (10.1) $\Rightarrow$ (10.2)

2. (10.2) est plus faible que (10.1)

Proposition 10.2 (Lebesgue)
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors, pour $\lambda-$presque tout x,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+\tau) - f(x)| d\tau = 0$$

En particulier, $\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+\tau) d\tau$ converge vers f $\lambda-$presque partout quand $h \to 0$.

☞ On a montré (proposition 7.3) que si f est localement intégrable, $F : x \mapsto \int_a^{a+x} f(t)dt$ est continue. La proposition 10.2 nous affire que F est dérivable $\lambda-$*presque partout*.

Proposition 10.3
Supposons (10.2) vérifiée en un point $t_0 \in \mathbb{T}$. Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f)(t_0) = \check{f}(t_0)$$

✌ La preuve de ce résultat est hors-programme.

Chapitre 11

Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Lemme 11.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.
Si $\sum_{(n\in\mathbb{Z})} |\widehat{f}|$ *converge alors* $(S_n(f))_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{T}$.

PREUVE : Posons, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n : t \mapsto \widehat{f}(n)e^{int}$. Alors $\sup |u_n| < |\widehat{f}(n)|$ d'où le résultat.

Il est important de noter les choses suivantes :

1. Il existe des fonctions L^1 dont les coefficients de Fourier convergent arbitrairement lentement vers 0.
2. Il existe des suites de complexes convergeant vers 0 qui ne sont coefficients de Fourier d'aucune fonction L^1.

Proposition 11.1
Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *telle que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n \geq 0$

(ii) $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n = a_{-n}$

(iv) $\forall n > 0$, $a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0$ *[Convexité]*

Alors :

$$\exists f \in L^1(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}\, \widehat{f}(n) = a_n$$

Lemme 11.2
Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$

(ii) $(a_n)_n$ décroit *vers 0*

(iii) $\sum a_n$ *converge*

Alors $na_n \longrightarrow 0$.

PREUVE : Par l'absurde : si ce n'était pas le cas, il existerait une partie I infinie de $\mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall n \in I$, $na_n \geq \alpha$. Alors $\forall n \in I$,

$$\sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} a_k \geq (n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)a_n \geq \frac{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}{n}\alpha$$

Le critère de Cauchy pour les séries convergentes est alors mis en défaut, d'où la contradiction recherchée.

Proposition 11.2
Soit $g \in L^1(\mathbb{T})$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{g}(|n|) = -\widehat{g}(-|n|) \geq 0$.
Alors $\sum \frac{1}{n}\widehat{g}(n)$ *converge.*

Corollaire 11.2.1
Soit $(b_n)_n$ *est une suite de réels positifs telle que* $\sum \dfrac{b_n}{n}$ *diverge.*
Alors $\sum b_n \sin(nt)$ *n'est pas la série de Fourier d'une fonction* L^1.

Exemple : Ainsi $\sum_{(n\geq 3)} \frac{\sin(nt)}{\ln(n)}$ ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction L^1.

Proposition 11.3
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ *k fois dérivable telle que* $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ $(k \geq 0)$.
Alors $\exists C > 0, \forall n \neq 0\, |\widehat{f}(n)| \leq \dfrac{C}{|n|^k}$

Corollaire 11.3.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ *2 fois dérivable telle que* $f'' \in L^1(\mathbb{T})$.
Alors $(S_n(f))_n$ *converge uniformément vers* f.

Chapitre 12

Séries de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$

I Motivation

Ce chapitre est motivé par la propriété suivante de l'espace $L^2(\mathbb{T})$:

Proposition 12.1
$L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{T}} \overline{f} g d\lambda$$

☞ Comme $\lambda(\mathbb{T}) < \infty$, on a l'inclusion $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ (d'après la proposition 1.9).

Proposition 12.2
$\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle c|d\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n$$

II Généralités sur les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, on se donne un espace de Hilbert de dimension *infinie* $\mathcal{H}$, muni d'un produit scalaire $\langle .|.\rangle$. On pose $\|.\| = \sqrt{\langle .|.\rangle}$.

Définition 12.1 (Familles orthogonale, orthonormée)
Soit A un ensemble.
Une famille $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de vecteurs de $\mathcal{H}$ est dite :

(i) orthogonale si $\forall \alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, $\langle e_\alpha|e_\beta\rangle = 0$

(ii) orthonormée si $\forall \alpha, \beta \in A$, $\langle e_\alpha|e_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$

Lemme 12.1 (Pythagore–Parseval)
Soit $(e_n)_{1\leq n\leq N}$ une famille orthonormée *et soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :*

$$\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$

Preuve :

$$\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{N} a_i e_i | \sum_{j=1}^{N} a_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{a_i} a_j \langle e_i|e_j\rangle = \|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\|^2$$

Proposition 12.3
Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une f.o.n et $(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$.
Alors $\sum a_n e_n$ converge dans $\mathcal{H}$.

PREUVE : $\mathcal{H}$ est un espace de Banach donc montrons que la suite $(S_N)_N$ des sommes partielles est de Cauchy. $\forall N \geq M \geq 0$,

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n e_n\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|^2 \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|^2$$

Or ce dernier terme converge vers 0 quand $M \to \infty$ en tant que reste d'une série convergente ($(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$) d'où le résultat.

Proposition 12.4
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une f.o.n.
Pour $f \in \mathcal{H}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \langle e_n|f\rangle$. Alors, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \|f - \sum_{n=0}^{N} a_n e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2$$

Corollaire 12.4.1 (Inégalité de Bessel)
Soit $(e_n)_{n\in I}$ une f.o.n tel que $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$ (i.e $I \hookrightarrow \mathbb{N}$).
Pour $f \in \mathcal{H}$, on pose $\forall n \in I$, $a_n = \langle e_n|f\rangle$. Alors :

$$\sum_{n\in I} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$$

Définition 12.2 (Système total)
Une f.o.n est dite totale si le seul vecteur qui lui est orthogonal est 0.

☞ Ceci est équivalent à la densité du s-ev engendré par la famille.

Lemme 12.2
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une f.o.n. Sont alors équivalents :

(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est total*

(ii)

$$\forall f \in \mathcal{H},\ \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n|f\rangle|^2$$

(iii)

$$\forall f \in \mathcal{H},\ f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n|f\rangle e_n$$

PREUVE :

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Découle de la proposition 12.4.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Trivial.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $f \in \mathcal{H}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n|f\rangle|^2 \leq \|f\|^2 < \infty$$

Donc $\sum \langle e_n|f\rangle e_n$ converge vers $g \in \mathcal{H}$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle e_n|f\rangle = \langle e_n|g\rangle$ et donc $f - g \in \langle (e_n)_n\rangle^{\perp} = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Si f est orthogonal à $(e_n)_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle e_n|f\rangle = 0$ donc $\|f\| = 0$ d'où $f = 0$.

Lemme 12.3 (Parseval)
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une f.o.n totale. Alors :

$$\forall f, g \in \mathcal{H},\ \langle f|g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f|e_n\rangle\langle e_n|g\rangle$$

Définition 12.3 (Opérateur unitaire, espaces de Hilbert isomorphes)
Soient $(\mathcal{H}_1, \langle .|.\rangle_1)$ et $(\mathcal{H}_2, \langle .|.\rangle_2)$ des espaces de Hilbert. Alors :

(i) $U \in \mathcal{G}\ell(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est dit unitaire si $\forall f, g \in \mathcal{H}_1$, $\langle U(f)|U(g)\rangle_2 = \langle f|g\rangle_1$.

(ii) Deux espaces de Hilbert sont dits isomorphes s'il existe un opérateur unitaire de l'un dans l'autre.

Proposition 12.5 (Projection dans un espace de Hilbert)
Soit $C \subset \mathcal{H}$ *un fermé convexe non vide.*
Alors : $\forall f \in \mathcal{H}$, $\exists! p \in C$ *tel que* $\|f - p\| = d(f, C)$.

☞ p est appelé le projeté orthogonal de f sur C.

III L'espace $L^2(\mathbb{T})$

III.1 Généralités

Lemme 12.4
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *des fonctions définies sur* $\mathbb{T}$ *par* $e_n : t \mapsto e^{int}$ *est totale dans* $L^2(\mathbb{T})$.

Preuve : Découle de la proposition 9.6.

Proposition 12.6
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. *Alors :*
(i)

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}(n)$$

En particulier,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

(ii) $(S_n(f))_n$ *converge vers* f *en norme* $\|.\|_2$.
(iii) $\forall (a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z})\ \exists! f \in L^2(\mathbb{T}),\ \forall n \in \mathbb{Z} a_n = \widehat{f}(n)$

Proposition 12.7
Soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{F}$ *est unitaire, de réciproque :*

$$\mathcal{F}^* : f \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e_n$$

☞ Ainsi $L^2(\mathbb{T})$ est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Proposition 12.8
Soit $n \geq 1$ *et soit* $E_n = \langle e_k \mid |k| \leq n\rangle$.
Alors si $f \in L^2(\mathbb{T})$, *le projeté orthogonal de* f *sur* E_n *est* $S_n(f)$.

Remarque : Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0 \dots 2^{j-1}$, on pose $e_{j,k} : t \mapsto 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$, où $\psi = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})} + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}$.
Cette famille forme une base de $L^2(\mathbb{T})$ appelée ondelettes de Haar.

III.2 Convergence en norme

Définition 12.4 (Convergence en norme sur un espace de Banach homogène)
Soit $\mathbb{B}$ *un espace de Banach homogène. On dit que* $\mathbb{B}$ *admet une convergence en norme si* $\forall f \in \mathbb{B}$, $\lim_n \|Sn(f) - f\|_{\mathbb{B}} = 0$

✌ Dans de tels espaces, on est certain que la série de Fourier d'une fonction f converge vers f.

Proposition 12.9
Soit $\mathbb{B}$ *un espace de Banach homogène. Alors :*

$$\begin{gathered} \mathbb{B} \textit{ admet une une convergence en norme} \\ \iff \\ \exists K > 0,\ \forall f \in \mathbb{B},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|S_n(f)\|_{\mathbb{B}} \leq K\|f\|_{\mathbb{B}} \end{gathered}$$

Remarque : Comme S_n est linéaire, cette condition est équivalente à $\exists K > 0$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||S_n||| \leq K$.

Théorème 12.10 (Banach–Steinhaus)
Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach, $\mathbb{Y}$ un espace normé et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.
Supposons que :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \sup_{F \in \mathcal{F}} \|F(x)\| < \infty$$

Alors il existe une boule fermée $B \subset \mathbb{X}$ tel que :

$$\sup_{x \in B} \left(\sup_{F \in \mathcal{F}} \|F(x)\| \right) < \infty$$

Remarque : $(S_n)_n$ vérifie les hypothèses du théorème 12.10.

Proposition 12.11
Soit $n \geq 1$.
Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach homogène. Alors $\forall f \in \mathbb{B}$, $|||S_n||| \leq L_n$, où L_n est le nombre de Lebesgue $L_n = \|D_n\|_1$. Il y a de plus égalité si $\mathbb{B} = L^1(\mathbb{T})$.

Preuve : Si $f \in \mathbb{B}$,

$$\begin{aligned}
\|S_n(f)\|_{\mathbb{B}} &= \|D_n * f\|_{\mathbb{B}} \\
&= \|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) f(. - t) dt\|_{\mathbb{B}} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \|f(. - t)\|_{\mathbb{B}} dt \\
&= L_n \|f\|_{\mathbb{B}}
\end{aligned}$$

De plus, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on peut montrer (exercice) que $(N \geq 1)$ $\|S_n(F_N)\|_1 = \|\sigma_N(S_n)\|$. De plus, D_n est continue sur $\mathbb{T}$ est $\sigma_N(D_n) \to^{L^1} D_n$ donc : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \geq 1$, $\forall N \geq N_0$, $\|D_n\|_1 - \|\sigma_N(D_n)\|_1 \leq \varepsilon$ et donc $\|\sigma_N(D_n)\|_1 \geq \|D_n\|_1 - \varepsilon$ d'où le résultat.

Proposition 12.12
Au voisinage de $+\infty$, on a $L_n = \dfrac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$

Corollaire 12.12.1
$L^1(\mathbb{T})$ n'admet pas de convergence en norme.

Corollaire 12.12.2
$(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$ n'admet pas de convergence en norme.

Preuve : De façon identique à celle détaillée dans la preuve de la proposition 12.11, on montre que $|||S_n||| = L_n$.

Proposition 12.13
Soit $p > 1$. Alors $L^p(\mathbb{T})$ admet une convergence en norme, i.e $\forall f \in L^p$, $S_n(f) \to^{L^p} f$.

☞ En particulier, $L^2(\mathbb{T})$ admet une convergence en norme.

Chapitre 13

Convergence simple

Définition 13.1 (Convergence simple sur un espace de Banach homogène)
Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach homogène. On dit que $\mathbb{B}$ admet une convergence simple (ou ponctuelle) si

$$\forall f \in \mathbb{B}, \forall t \in \mathbb{T},\ \lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = f(t)$$

Proposition 13.1
Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.

✌ La preuve de ce résultat est hors-programme.

Corollaire 13.1.1
On obtient que :

(i) $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ *n'admet pas de convergence simple.*

(ii) $L^1(\mathbb{T})$ *n'admet pas de convergence simple.*

Proposition 13.2
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ *vérifiant que* $\forall n \in \mathbb{Z},\ |\widehat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$.
Alors$(S_n(f))_n$ *et* $(\sigma_n(f))_n$ *convergent simplement en les mêmes points et vers la même limite.*

Définition 13.2 (Fonction à variation bornée)
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *et* $\pi = (a = t_0 < t_, < \ldots < t_n = n)$ *une subdivision de* $[a,b]$.

(i) On définit la variation de f sur $[a,b]$ selon π par :

$$v(f,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \in [0,\infty)$$

(ii) Soit $\Pi_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions finies de $[a,b]$. On définit la variation de f sur $[a,b]$ par :

$$V(f,[a,b]) = \sup_{\pi\in\Pi_{[a,b]}} v(f,\pi) \in [0,\infty]$$

(iii) Si $V(f,[a,b]) < \infty$, f est dite à variation bornée sur $[a,b]$.

✍ On note $VB[a,b]$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$.

Remarque :

1. Si f est monotone, f est à variation bornée.
2. $VB[a,b]$ est un $\mathbb{R}$–e.v.

Lemme 13.1
Soit $f \in VB[a,b]$. *Alors* $V(f,[a,.])$ *et* $V(f,[a,.]) - f$ *sont croissantes sur* $[a,b]$.

Preuve :

- Soient $a \leq x \leq y \leq b$ et $\pi = (t_i)_i \in \Pi_{[a,b]}$. Si $x \notin \pi$, on pose $\pi_1 = \pi' \cup \pi''$, où $\pi' \in \Pi_{[a,x]}$, $\pi'' \in \Pi_{[x,b]}$.
  Alors $v(f,\pi) \leq v(f,\pi_1) = v(f,\pi') + v(f,\pi'')$ car $|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq |f(t_{i+1}) - f(x)| + |f(x) - f(t_i)|$.
  Ainsi :
  $$V(f,[a,b]) \leq \sup_{\pi' \in \Pi_{[a,x]}} v(f,\pi') + \sup_{\pi'' \in \Pi_{[x,b]}} v(f,\pi'')$$
  Donc $V(f,[a,b]) = V(f,[a,x]) + V(f,[x,b])$ donc $V(f,[a,.])$ est croissante.
- De plus, on montre de même que $V(f,[a,y]) = V(f,[a,x]) + V(f,[x,y])$. Or :
  $$\begin{aligned} V(f,[x,y]) &\geq \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \, , \; x = x_0 < \ldots < x_n = y \\ &\geq |f(y) - f(x)| \\ &\geq f(y) - f(x) \end{aligned}$$
  Donc $V(f,[a,y]) \geq V(f,[a,x]) + f(y) - f(x)$ d'où le résultat.

✖ Il existe des fonctions intégrables, et même continues, qui ne sont pas à variation bornées. On peut cependant montrer que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont à variations bornées.

Proposition 13.3
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors :
$$f \in VB[a,b]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\textit{Il existe } g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ croissantes telles que } f = g_1 - g_2.$$

Preuve : Pour le sens direct, utiliser les fonctions croissantes données par le lemme 13.1. Le sens indirect est trivial ($VB[a,b]$ est un $\mathbb{R}$–e.v).

Lemme 13.2
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$. Alors :
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0$$
.

Lemme 13.3
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors :
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \left|\alpha \int_a^b f(x) e^{i\alpha x} dx\right| \leq |f(a) - f(b)| + |f(a) - e^{i\alpha} f(b)|$$

Preuve : Si $\alpha = 0$, le résultat est trivial. Sinon, quitte à changer de variable, plaçons nous sur $[a,b] = [0,1]$. Alors, par sommes de Riemmann (f est monotone et $e^{i\alpha \cdot}$ continue donc notre fonction est Riemann–intégrable) :
$$\alpha \int_0^1 f(x) e^{i\alpha x} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\alpha \frac{k}{n}}$$
Posons :
$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\alpha \frac{k}{n}}, \; \tilde{S} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\alpha \frac{k+1}{n}}$$
On a alors que $S = \dfrac{1}{1 - e^{i\frac{\alpha}{n}}}(S - \tilde{S})$. Donc :
$$\left|\frac{\alpha}{n} S\right| = \left|\frac{\alpha}{n} \frac{1}{1 - e^{i\frac{\alpha}{n}}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right)\right|$$
Or, par développement limité, $|n(1 - e^{i\frac{\alpha}{n}})| = |\alpha| + O\left(\dfrac{1}{|n|}\right)$ d'où le résultat.

Proposition 13.4
Soit $f \in L^1(\mathbb{T}) \bigcap VB[0, 2\pi]$. Alors $\sup_n |n\widehat{f}(n)| < \infty$.

PREUVE : Quitte à utiliser la décomposition de la proposition 13.3, on peut supposer f croissante. On obtient ainsi le résultat en appliquant le lemme 13.3 avec $\alpha = -n$.

Corollaire 13.4.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{T}) \bigcap VB[0, 2\pi]$. Alors :

(i) $(S_n(f))_n$ *converge vers* $\check{f}$.

(ii) La convergence est uniforme sur les intervalles fermés de continuité de f.

✌ Si f est continue en $t \in To$, $\check{f}(t) = f(t)$.

Proposition 13.5 (Dini)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Soit $t_0 \in \mathbb{T}$ tel que :

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(t + t_0) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty$$

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f)(t_0) = f(t_0)$$

PREUVE : Pour $t \in \mathbb{T}$ posons $G(t) = |f(t_0 + t) - f(t_0)|$. Par hypothèse, $\int_{-1}^{1} \left| \frac{G(t)}{t} \right| dt < \infty$ donc par lemme 13.2, $S_n(G)(0) \to 0$. Or $S_n(G)(0) = S_n(f_{-t_0})(0) - f(t_0) = S_n(f)(t_0) - f(t_0)$ d'où le résultat.

Chapitre 14

Transformée de Fourier

✖ Ce chapitre est hors-programme.

Pour étudier des fonctions non–périodiques, on ne peut se ramener au fort sympathique compact $\mathbb{T}$, la dite étude ne pouvant être menée que sur $\mathbb{R}$. Il est à noter que si toute la théorie établie pour $L^1(\mathbb{T})$ se généralise assez directement à $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ et donc la théorie de $L^2(\mathbb{T})$ ne s'étend pas naturellement à $L^2(\mathbb{R})$.

I Définitions, propriétés générales

Définition 14.1 (Transformée de Fourier)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f comme la fonction qui à $\xi \in \mathbb{R}$ associe

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

Proposition 14.1
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$

(ii) $\forall a \in \mathbb{C}$, $\widehat{af}(\xi) = a\widehat{f}(\xi)$

(iii) $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$

(iv) Si $y \in \mathbb{R}$ et $f_y : f \mapsto f(t-y)$ alors $\widehat{f_y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-iny}$

(v) $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$

Proposition 14.2
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}$ est u.c sur $\mathbb{R}$.

Proposition 14.3 (Produit de convolution)
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) La fonction $y \mapsto f(t-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction $f * g : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t-y)g(y)dy$, appelée produit de convolution (ou convolée) de f et g, vérifie :

  (a) $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

  (b) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

  (c) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Proposition 14.4
$(L^1(\mathbb{R}), +, *, .)$ est une algèbre de Banach commutative non unitaire.

Proposition 14.5
Soient $f, g, H \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H(\xi)e^{i\xi x}d\xi$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

Proposition 14.6
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.
Si $F \in L^1(\mathbb{R})$, *alors :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{F}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\widehat{f}(\xi)$$

.

☞ Notons que $(F \in L^1(\mathbb{R})) \nRightarrow (\lim_\infty F = 0)$. Pour un contre-exemple, considérons la fonction suivante :

$$F : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \ln(k) \mathbb{1}_{[k, k+\frac{1}{k^2}]}$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} < \infty$$

Pourtant, F ne tend pas vers 0 en l'infini. Ceci étant, cette implication est vraie dés que $F' \in {}^1(\mathbb{R})$. Un énoncé équivalent de la proposition 14.6 est :

Proposition 14.7
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1$. Alors, $\forall \xi \neq 0$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.

Proposition 14.8
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\varphi : x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

(i) $\widehat{f}$ *est dérivable.*

(ii) $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \dfrac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = -i\widehat{\varphi}(\xi)$

✖ Par abus, on note souvent φ "xf".
PREUVE : Soit $h \neq 0$ et soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\Delta_h := \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\left(\frac{e^{ihx} - 1}{h}\right)dx$$

Or $\left|\dfrac{e^{ihx} - 1}{h}\right| \leq |x|$ par théorème des accroissements finis donc $|\Delta_h| \leq \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|dx < \infty$. D'où le (i).

Pour le (ii), il suffit de remarquer que $f(x)e^{-i\xi x}\left(\dfrac{e^{ihx} - 1}{h}\right) \xrightarrow[h \to 0]{} -ixf(x)e^{-i\xi x}$ et de conclure par convergence dominée (appliquer la proposition 1.5 puis une caractérisation séquentielle).

Proposition 14.9 (Riemann–Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

PREUVE : Si $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, $g' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et donc $g(x) = \int_{-\infty}^{x} g'(y)dy$ et donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\xi\widehat{g}(\xi)| = |\widehat{g'}(\xi)| \leq \|g'\|_1 < \infty$ donc $\exists K > 0$ tel que $\sup |\xi\widehat{g}(\xi)| \leq K$ d'où le résultat. Conclure par densité de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

II Régularisation

Notation : On notera désormais $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Remarques :

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c^{p+1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$
2. On pose $(c \neq 0)$ $\rho(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{c}\exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$ Alors ρ est non analytique, i.e sa série de Taylor converge, mais pas vers ρ.

Définition 14.2 (Suite régularisante)
On appelle suite régularisante une suite de fonctions $(\rho_n)_n$ telle que :

(i) $\forall n \geq 0,\ \rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

(ii) $\forall n \geq 0,\ \rho_n \geq 0$

(iii) $\forall n \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$

(iv) Il existe une suite $(\varepsilon_n)_n \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant que* $\left\{\begin{array}{l} \forall n \geq 0,\ \mathrm{supp}(\rho_n) \subset [-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \\ \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right.$

Exemple Poser pour $n \geq 0$, $\rho_n(x) = n\rho(xn)$.

Définition 14.3 (Suite des régularisées)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Soit $(\rho_n)_n$ *une suite régularisante.*
On appelle suite des régularisées de f *la suite* $(\rho_n * f)_n$.

Lemme 14.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Soit $(\rho_n)_n$ *une suite régularisante.*
Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_n * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

☞ ATTENTION : $\rho_n * f \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

Proposition 14.10
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R})$ *pour* $p \geq 1$.

PREUVE : Par densité, $\forall f \in L^p, \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$. Conclure en approximant f_ε par $g_n := \rho_n * f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $(\rho_n)_n$ une suite régularisante.

III Identités approchées, noyau de Fejèr

Définition 14.4 (Identité approchée sur $\mathbb{R}$)
Soit $A \subset \mathbb{R}$. *On appelle identité approchée sur* $\mathbb{R}$ *une famille de fonctions* $k_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \in A$ *vérifiant :*

(i) $\forall \alpha \in A,\ \int_{\mathbb{R}} k_\alpha(x)dx = 1$

(ii) $\|k_\alpha\| = O(1)$ *quand* $\alpha \to \sup A$.

(iii) $\forall \delta > 0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha} |k_\alpha(x)|dx \xrightarrow[\alpha\to\sup A]{} 0$

☞ En pratique, on prend souvent $A = \mathbb{R}_+^*$.

Définition 14.5 (Noyau de Fejèr)
On définit le noyau de Fejèr $(F_\alpha)_{\alpha>0}$ *par* $\forall x \in \mathbb{R},\ F_\alpha(x) = \alpha F(\alpha x)$ *où :*

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1 - |\xi|)e^{i\xi x}d\xi$$

Lemme 14.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 dx = 1$$

PREUVE : Considérer la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ et l'intégrer selon le chemin $C_{\varepsilon,R}$ consistant à parcourir dans le sens trigonométrique le demi cercle de centre 0 et de rayon R privé de celui de centre 0 et de rayon ε.

Proposition 14.11
$(F_\alpha)_{\alpha>0}$ *est une identité approchée.*

Proposition 14.12
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $(k_\alpha)_{\alpha\in A}$ une identité approchée. Alors $\|k_\alpha * f - f\|_1 \xrightarrow[\alpha\to\sup A]{} 0$.

Proposition 14.13
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|\xi|}{\alpha}\right)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \right\|_1 \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0$$

Preuve : Découle des propositions 14.11 et 14.12.

Corollaire 14.13.1 (Théorème d'unicité)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant que $\forall\xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\xi) = 0$. Alors $f = 0$.

Remarque : Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors on peut appliquer le théorème de convergence dominée à $g_\alpha : (x,\xi) \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\left(1-\dfrac{|\xi|}{\alpha}\right)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(\xi)$ (domination par $\widehat{f}$) pour obtenir que :

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x,\xi)d\xi \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

Et comme $g_\alpha(x,.) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{L^1} f(x)$ on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

Ainsi, si on pose $h(x) := \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$ on peut montrer que h est uniformément continue. Ainsi, on en déduit le résultat suivant : *si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, la classe d'équivalence $f \in L^1(\mathbb{R})$ contient une fonction uniformément continue.*

☞ Le résultat suivant est analogue à la proposition 9.5 (densité des polynômes trigonométriques).

Proposition 14.14
Les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact forment un sous-ensemble dense de $L^1(\mathbb{R})$.

Chapitre 15

L'espace $L^2(\mathbb{R})$

✖ **Ce chapitre est hors-programme.**

I Position du problème

La transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$ ne se généralise pas naturellement à $L^2(\mathbb{R})$ pour la simple et bonne raison que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$. On va donc devoir utiliser le résultat d'analyse fonctionnelle suivant pour étendre notre définition.

Proposition 15.1
Soient $\mathbb{X}$ un e.v.n, $\mathbb{Y}$ un espace de Banach et $\mathbb{W} \subset \mathbb{X}$ un s-e.v dense.
Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_c(\mathbb{W}, \mathbb{Y})$.
Alors : $\exists! \tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ tel que :

(i) La restriction de $\tilde{\mathcal{F}}$ est égale à $\mathcal{F}$.
(ii) $\|\tilde{\mathcal{F}}\| = \|\mathcal{F}\|$

Le problème qui se pose à présent est de trouver un s-e.v dense de $L^2(\mathbb{R})$ sur lequel on puisse définir naturellement une transformée de Fourier, i.e qui soit inclus dans $L^1(\mathbb{R})$.

II L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 15.1 (Fonction à décroissance rapide)
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide si elle décroit plus vite que tout polynôme, i.e si $\forall p \in \mathbb{N}$, $|x^p f(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$.

Proposition 15.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors :

1. *Si $f \in f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors f est à décroissance rapide.*
2. *Si $f \in f \in L^1(\mathbb{R})$ et est à décroissance rapide, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $\forall k \geq 0$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.*

Définition 15.2 (Espace de Schwartz)
On définit l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, comme l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
(ii) $\forall k \geq 0$, $f^{(k)}$ est à décroissance rapide (avec la convention $f^{(0)} = f$).

Proposition 15.3
On a les propriétés suivantes :

1. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme.*
2. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation.*

3. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$*
4. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.*
5. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.*
6. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

PREUVE : Pour 5 et 6, il suffit de remarquer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans L^1. Remarquons que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est *pas* stable par transformée de Fourier.

Proposition 15.4 (Identité de Plancherel–Parseval)
Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

(i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x)g(x)dx$$

(ii)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$

✌ Ainsi, on peut étendre par la proposition 15.1 la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$:

Proposition 15.5 (Plancherel)
Il existe un unique opérateur $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

(i) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$

(ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}f = \widehat{f}$

✍ En pratique, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est approximée par une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a que $\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathcal{F}f$, ce qui permet le calcul "explicite de la transformée de Fourier de f.