# Introduction aux marches aléatoires sur les groupes de type fini.

Julien BLED

Université de Bretagne Sud

15 octobre 2014

# Plan

## Définition

Soit $G$ un groupe et $\mu$ une probabilité sur $G$. On appelle *marche aléatoire droite sur $G$* (issue de $e$) la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi initiale $\delta_e$ et de transitions $p(x,y) = \mu(x^{-1}y)$.

## Définition

Soit $G$ un groupe et $\mu$ une probabilité sur $G$. On appelle *marche aléatoire droite sur $G$* (issue de $e$) la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi initiale $\delta_e$ et de transitions $p(x,y) = \mu(x^{-1}y)$.

On a donc

$$\forall g \in G, p(x, xg) = \mu(g).$$

## Définition

Soit $G$ un groupe et $\mu$ une probabilité sur $G$. On appelle *marche aléatoire droite sur $G$* (issue de $e$) la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi initiale $\delta_e$ et de transitions $p(x,y) = \mu(x^{-1}y)$.

On a donc

$$\forall g \in G, p(x, xg) = \mu(g).$$

Soient $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ des variables aléatoires sur $G$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi $\mu$. Alors $X_n = h_1 h_2 \ldots h_n$ est une marche aléatoire sur $G$ (de loi $\mu$).

On suppose dans la suite que $S$ est un système fini et symétrique ($S = S^{-1}$) de générateurs de $G$, et que $\mu$ est portée par $S$ ($\sum_{g \in S} \mu(g) = 1$). On supposera également que $\mu$ est symétrique ($\mu(g) = \mu(g^{-1})$) et *non dégénérée*, c'est à dire que le support de $\mu$ engendre $G$ en tant que semi-groupe.

## Définition

On appelle graphe de Cayley de $G$ par rapport à $S$ le graphe de sommets les éléments de $G$ et tel que
$x \to y \iff \exists g \in S,\ y = xs.$

### Définition

On appelle graphe de Cayley de $G$ par rapport à $S$ le graphe de sommets les éléments de $G$ et tel que
$x \rightarrow y \iff \exists g \in S, \; y = xs.$

On fixe dans la suite un système $S$ (symétrique et fini) de générateurs de $G$, et on munit $G$ de la métrique des mots associés (qui est la distance « classique »dans le graphe de Cayley).

## Remarque

La marche aléatoire définie précédemment, lorsque $\mu$ est portée par $S$, est une marche aléatoire au plus proche voisin dans le graphe de Cayley.

# Plan

## Définition

Une marche aléatoire sur $G$ (issue de $e$) est dite *récurrente* si

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^*, X_n = e) = 1$$

. Une marche qui n'est pas récurrente est dite *transiente*.

**Théorème (Pólya, 1921)**

*Les marches aléatoires symétriques sur* $\mathbb{Z}^d$ *sont*

- *récurrentes pour* $d \in \{1, 2\}$
- *transientes pour* $d \geq 3$.

### Théorème (Varopoulos, '80)

*Soit $G$ un groupe admettant une marche aléatoire (avec les hypothèses précédentes) récurrente. Alors, $G$ contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$.*

**Théorème (Varopoulos, '80)**

*Soit $G$ un groupe admettant une marche aléatoire (avec les hypothèses précédentes) récurrente. Alors, $G$ contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$.*

**Remarque**

Dans ce cas, toutes les marches aléatoires symétriques avec un moment d'ordre 2 sont récurrentes.

# Plan

## Proposition

*Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire de loi $\mu$ sur $G$. Alors la limite*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(e, X_n)}{n}$$

*existe presque sûrement et dans $\mathrm{L}^1$. On l'appelle vitesse de fuite de la marche aléatoire.*

## Définition

Une fonction $f : G \to G$ est dite $\mu$-harmonique si

$$\forall g \in G, f(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh).$$

## Définition

Une fonction $f : G \to G$ est dite $\mu$-harmonique si

$$\forall g \in G, f(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh).$$

## Proposition

*Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire symétrique de support fini et de loi $\mu$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

## Définition

Une fonction $f : G \to G$ est dite $\mu$-harmonique si

$$\forall g \in G, f(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh).$$

## Proposition

*Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire symétrique de support fini et de loi $\mu$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La vitesse de fuite de la marche est strictement positive ($\ell > 0$).*

## Définition

Une fonction $f : G \to G$ est dite $\mu$-harmonique si

$$\forall g \in G, f(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh).$$

## Proposition

*Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire symétrique de support fini et de loi $\mu$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La vitesse de fuite de la marche est strictement positive ($\ell > 0$).*
2. *Il existe des fonctions $\mu$-harmoniques bornées non-constantes.*

Merci pour votre attention !