

# Accélération de fronts de réaction-diffusion par une ligne de diffusion rapide.

Laurent Dietrich  
Dir. H. Berestycki et J.-M. Roquejoffre

Institut de mathématiques de Toulouse

Rencontres doctorales Lebesgue – 13 octobre 2014



## 1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle

- Questions

## 2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?

- Propagation dans les équations homogènes

## 3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP

- Avec une non-linéarité à seuil ?

- Résultats

## 4 Perspectives

## Modèle étudié

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi (2012) :

$$\partial_t u - D \partial_{xx}^2 u = v(t, x, 0) - \mu u$$

---

$$d \partial_y v = \mu u - v$$

$$\partial_t v - d \Delta v = f(v)$$

# Modèle étudié

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi (2012) :

$$\partial_t u - D \partial_{xx}^2 u = v(t, x, 0) - \mu u$$

---


$$d \partial_y v = \mu u - v$$

$$\partial_t v - d \Delta v = f(v)$$

- Motivation : illustrer le fait que les réseaux de transports augmentent la vitesse des invasions biologiques.

## Motivations

- Ex. 1 : épidémies. La peste de 1347 a diffusé rapidement en Europe à partir des axes commerciaux.

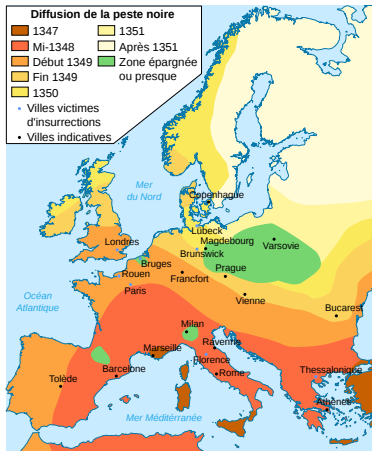


Figure: Source : Wikipédia

- Ex. 2 : la chenille processionnaire du pin. Va vers le Nord à cause du réchauffement global, mais on pense que les routes jouent un rôle (cf. l'invasion en Île de France).



Figure: Chenille processionnaire (Auray, Bretagne). Source : Wikipédia

## Question soulevée

Quel est le comportement en temps grand de  $u$  et  $v$  ?  
Quelle est l'influence de la route sur ce comportement ?

## 1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

## 2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

## 3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

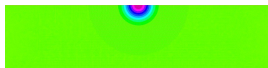
## 4 Perspectives



## Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

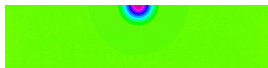
$$u_t - \Delta u = 0$$



# Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

$$u_t - \Delta u = 0$$



- ... et la réaction

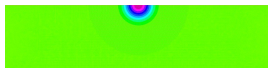
$$u_t = f(u)$$



# Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

$$u_t - \Delta u = 0$$



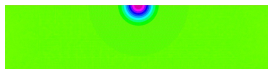
- ... et la réaction

$$u_t = f(u)$$



- Équilibres non triviaux entre les états stationnaires 0 et 1 ?

$$u_t - \Delta u = f(u)$$



# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici  $c^* = 2$  est la **vitesse de propagation**.

# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici  $c^* = 2$  est la **vitesse de propagation**.

## Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$  avec  $f(u) = u(1 - u)$ .

# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici  $c^* = 2$  est la **vitesse de propagation**.

## Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$  avec  $f(u) = u(1 - u)$ .
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$  donc

# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici  $c^* = 2$  est la **vitesse de propagation**.

## Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$  avec  $f(u) = u(1 - u)$ .
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$  donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{df'(0)}$$



# Élément de comparaison : le cas KPP homogène

## Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit  $u_t - \Delta u = u(1 - u)$  avec  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Alors

- Pour tout  $c > 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout  $c < 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici  $c^* = 2$  est la **vitesse de propagation**.

## Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$  avec  $f(u) = u(1 - u)$ .
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$  donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{df'(0)}$$

- Quelle est l'influence de la ligne et de  $D$  sur la **vitesse de propagation** dans la direction  $e_1$  dans notre modèle ?

## 1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

## 2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

## 3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

## 4 Perspectives

## Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

### Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si  $f(v) = v(1 - v)$  il y a une vitesse d'invasion  $c^*(D) > 0$  dans la direction  $e_1$  t.q. :

- Si  $D \leq 2d$ ,  $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$ .

# Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

## Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si  $f(v) = v(1 - v)$  il y a une vitesse d'invasion  $c^*(D) > 0$  dans la direction  $e_1$  t.q. :

- Si  $D \leq 2d$ ,  $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$ .
- Si  $D > 2d$ ,  $c^* > c_{KPP}$  et  $\frac{c^*(D)}{\sqrt{D}}$  a une limite finie quand  $D \rightarrow +\infty$ .

## Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

### Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si  $f(v) = v(1 - v)$  il y a une vitesse d'invasion  $c^*(D) > 0$  dans la direction  $e_1$  t.q. :

- Si  $D \leq 2d$ ,  $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$ .
- Si  $D > 2d$ ,  $c^* > c_{KPP}$  et  $\frac{c^*(D)}{\sqrt{D}}$  a une limite finie quand  $D \rightarrow +\infty$ .

### Remarques

On observe donc un phénomène d'accélération de la propagation dans la direction  $x$  dû à la diffusion sur la route.

## Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'une non-linéarité plus générale ?

P. ex. un phénomène de seuil pourrait-il y faire obstruction

## Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'une non-linéarité plus générale ?

P. ex. un phénomène de seuil pourrait-il y faire obstruction

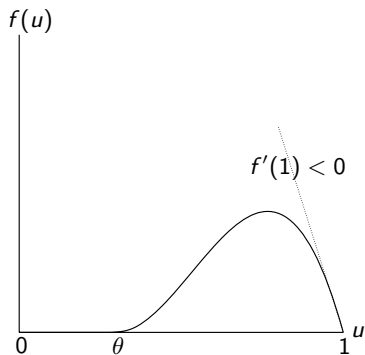


Figure: Exemple  $f = \mathbf{1}_{u > \theta} (u - \theta)^2 (1 - u)$

C'est une question non triviale car :

- Fisher-KPP est très spécifique : le fait que  $f$  soit sous sa tangente à l'origine permet de calculer  $c^*$  quasi explicitement (tout se ramène à des équations algébriques).



C'est une question non triviale car :

- Fisher-KPP est très spécifique : le fait que  $f$  soit sous sa tangente à l'origine permet de calculer  $c^*$  quasi explicitement (tout se ramène à des équations algébriques).
- Cette condition pourrait être nécessaire pour obtenir l'accélération : p. ex

$$u_t + (-\Delta)^\alpha u = f(u)$$

propage les solutions initialement à support compact à vitesse exponentielle, mais pour une linéarité à seuil c'est faux, la propagation reste linéaire.

## Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction  $e_1$ .

## Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction  $e_1$ .
- La notion de vitesse d'invasion cache une dynamique non-triviale : celle des ondes progressives. Peut-on aller les chercher ici ? Et leur vitesse ?

## Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction  $e_1$ .
- La notion de vitesse d'invasion cache une dynamique non-triviale : celle des ondes progressives. Peut-on aller les chercher ici ? Et leur vitesse ?

Ondes progressives dans la bande : solutions de la forme

$$c > 0, u(t, x) = \phi(x + ct), v(t, x, y) = \psi(x + ct, y)$$

$$\begin{array}{ccc}
 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi & \phi \rightarrow 1/\mu \\
 \hline
 & d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0) & \\
 \\
 0 \leftarrow \psi & -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) & \psi \rightarrow 1 \\
 \\
 & \partial_y\psi = 0 &
 \end{array}
 \quad (1)$$

avec limites uniformes.

# Résultats

## Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe  $(c, \phi, \psi)$  une solution de (1).

# Résultats

## Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe  $(c, \phi, \psi)$  une solution de (1).
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$ ,  $0 < \psi < 1$ , et  $\partial_x \phi, \partial_x \psi > 0$ .

# Résultats

## Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe  $(c, \phi, \psi)$  une solution de (1).
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$ ,  $0 < \psi < 1$ , et  $\partial_x \phi, \partial_x \psi > 0$ .
- Si  $(\underline{c}, \bar{\phi}, \bar{\psi})$  est solution de (1),  $\underline{c} = c$  et il existe  $r \in \mathbb{R}$  t.q.  $\bar{\phi}(\cdot + r) = \phi(\cdot)$  et  $\bar{\psi}(\cdot + r) = \psi(\cdot)$ .



## Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie  $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$  avec  $c_\infty > 0$  qui dépend de  $L, \mu, d$  et  $f$ .

## Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie  $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$  avec  $c_\infty > 0$  qui dépend de  $L, \mu, d$  et  $f$ .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse  $c_\infty$  au modèle renormalisé limite ( $x \leftarrow x\sqrt{D}$  et  $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ ) quand  $D \rightarrow +\infty$  :

Théorème 2. (D., 2013) :  $D \rightarrow +\infty$ 

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie  $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$  avec  $c_\infty > 0$  qui dépend de  $L, \mu, d$  et  $f$ .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse  $c_\infty$  au modèle renormalisé limite ( $x \leftarrow x\sqrt{D}$  et  $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ ) quand  $D \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow \phi & -\phi'' + c\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi & \phi \rightarrow 1/\mu \\ \hline & d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0) & \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad c\partial_x\psi - \frac{d}{D}\partial_{xx}\psi - d\partial_{yy}\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0 \qquad (2)$$

Théorème 2. (D., 2013) :  $D \rightarrow +\infty$ 

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie  $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$  avec  $c_\infty > 0$  qui dépend de  $L, \mu, d$  et  $f$ .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse  $c_\infty$  au modèle renormalisé limite ( $x \leftarrow x\sqrt{D}$  et  $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ ) quand  $D \rightarrow +\infty$  :

$$0 \leftarrow \phi \qquad -\phi'' + c_\infty \phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi \qquad \phi \rightarrow 1/\mu$$

---


$$d\partial_y \psi = \mu\phi - \psi(x, 0)$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad c_\infty \partial_x \psi - d\partial_{yy} \psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y \psi = 0$$

(2)

## Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à  $D = +\infty$  par une méthode directe sans passer par la régularisation  $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$ .

## Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à  $D = +\infty$  par une méthode directe sans passer par la régularisation  $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$ .
- On a donc une régularisation en  $x$  due à l'effet de la route et au terme  $c\partial_x v$  : résultat à rapprocher de la régularité dans les équations cinétiques.

## Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à  $D = +\infty$  par une méthode directe sans passer par la régularisation  $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$ .
- On a donc une régularisation en  $x$  due à l'effet de la route et au terme  $c\partial_x v$  : résultat à rapprocher de la régularité dans les équations cinétiques.
- À  $c = 0$  on montre qu'il n'existe que des solutions discontinues en  $x$  : le terme  $c\partial_x v$  est donc nécessaire.

## 1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

## 2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

## 3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

## 4 Perspectives



## Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si  $|\{v_0 > \theta\}|$  assez grand (en fonction de  $d$ ) alors

# Perspectives

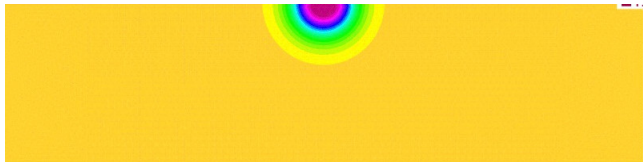
- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si  $|\{v_0 > \theta\}|$  assez grand (en fonction de  $d$ ) alors
  - 1) Formation d'un front de vitesse  $c(d)$  dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ( $u \simeq 0$ ).

# Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si  $|\{v_0 > \theta\}|$  assez grand (en fonction de  $d$ ) alors
  - 1) Formation d'un front de vitesse  $c(d)$  dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ( $u \simeq 0$ ).
  - 2) Une fois une taille critique (fonction de  $D$ ) atteinte dans la bande, transition : après réception de la masse, la route se met à guider.

# Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si  $|\{v_0 > \theta\}|$  assez grand (en fonction de  $d$ ) alors
  - 1) Formation d'un front de vitesse  $c(d)$  dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ( $u \simeq 0$ ).
  - 2) Une fois une taille critique (fonction de  $D$ ) atteinte dans la bande, transition : après réception de la masse, la route se met à guider.
  - 3) Accélération vers un front de vitesse  $c(D)$ .



Merci pour votre attention !

## Stratégie de preuve : existence

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi), \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi & \phi \rightarrow 1/\mu \\ \hline & d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0) & \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

## Stratégie de preuve : existence

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi), \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = (\psi(x, 0) - \mu\phi)/\varepsilon & \phi \rightarrow 1/\mu \\ \hline & d\partial_y\psi = (\mu\phi - \psi(x, 0))/\varepsilon & \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Étape 1 : forcer  $\mu\phi = \psi$  sur la route avec  $\varepsilon$ , paramètre dans  $(0, 1)$ .

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi = \frac{D}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x\psi$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$


---



## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi = \frac{sD}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x\psi$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$


---

Étape 2 : varier  $D$  avec  $s \in (0, 1)$ .

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi + \frac{\varepsilon}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

---


$$\partial_y\psi = 0$$


---

Interprétation :  $\psi$  sur la route s'ajuste à  $\psi$  dans le champ avec un délai

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi + \frac{ct}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

---


$$\partial_y\psi = 0$$


---

Interprétation :  $\psi$  sur la route s'ajuste à  $\psi$  dans le champ avec un délai

Étape 3 : varier  $\frac{1}{\mu}$  avec  $t \in (0, 1)$ .

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$


---

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$


---

Interprétation : la route devient une cloture

## Stratégie de preuve : existence

---


$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$


---

Interprétation : la route devient une cloture

Théorème : Kanel '69, Berestycki-Nirenberg '90

Ce problème a une unique solution, l'onde plane.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans  $[0, 1]$ .



- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans  $[0, 1]$ .
  - Fermeture : estimées a priori, bornes sur  $c$ , estimées et solutions exponentielles.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans  $[0, 1]$ .
  - Fermeture : estimées a priori, bornes sur  $c$ , estimées et solutions exponentielles.
  - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans  $[0, 1]$ .
  - Fermeture : estimées a priori, bornes sur  $c$ , estimées et solutions exponentielles.
  - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.
- Le cas  $\varepsilon \simeq 0$  est une perturbation singulière et est traité à part.

## Limite de grande diffusion

- Renormaliser  $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$  et  $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ .

# Limite de grande diffusion

- Renormaliser  $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$  et  $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ .
- Obtention d'une estimée originale : module de continuité uniforme sur les  $\psi_n$  sur  $J_n \times [-L, 0]$  où  $J_n$  est un borélien de  $[-1, 1]$  de mesure  $\geq 1$  ;  
itération via des identités à la Gagliardo-Nirenberg  $\rightarrow$  compacité.

# Limite de grande diffusion

- Renormaliser  $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$  et  $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$ .
- Obtention d'une estimée originale : module de continuité uniforme sur les  $\psi_n$  sur  $J_n \times [-L, 0]$  où  $J_n$  est un borélien de  $[-1, 1]$  de mesure  $\geq 1$  ;  
itération via des identités à la Gagliardo-Nirenberg  $\rightarrow$  compacité.
- Adapter les résultats d'unicité de vitesse au cas limite : voir  $x$  comme le temps et le problème comme elliptique-parabolique.