Aire d'un processus de Lévy stable arrêté en 0.

En collaboration avec T. Simon

Université Lille 1

13 octobre 2014

Plan

1. Cas du mouvement brownien
    - Mouvement brownien
    - Sur l'Aire du processus
    - Quelques propriétés
    - Ce qu'on cherche à étendre
2. Cas du Lévy stable
    - Un outil important
    - Résultat principal
    - Conséquences
3. Perspectives

Définition

Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus partant de 0 à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires continues.

Accroissements indépendants :
$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$, les variables $\{B_{t_{j+1}} - B_{t_j}, 1 \leq j \leq n-1\}$ sont indépendantes.

Accroissements stationnaires :
$\forall t, \ s > 0, \ \mathcal{L}(B_{t+s} - B_s) = \mathcal{L}(B_t)$

Propriété importante : L'auto-similarité

$$\forall c > 0,\ (B_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (cB_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$$

$$\forall t > 0, B_t \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{2}} B_1,$$

avec $B_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Propriété importante : L'auto-similarité

$$\forall c > 0,\ (B_t)_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} (cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$$

$$\forall t > 0, B_t \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{2}} B_1,$$

avec $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$\Rightarrow$ B est appelé processus stable d'indice 2.

Définition

La loi d'une variable aléatoire X est dite stable si $\forall n \geq 1$ $X_1, ..., X_n$ copies i.i.d de X :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X$$

avec $\alpha \in (0, 2]$.

Ici on a bien :

$$\mathcal{N}(0,1)^{\otimes n} \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}(0,1)$$

Soit B un mouvement brownien standard. On note $A_t = \int_0^t B_s ds$ l'aire de ce processus. On introduit :

$$T = \inf\{t > 0,\ B_t = 0\},$$

$$S = \inf\{t > 0,\ A_t = 0\},$$

$\Rightarrow$ On s'intéresse au comportement de la variable aléatoire A_T.

Propriétés :

1. $(A_t,\ t \geq 0)$ n'est pas Markovien. Par contre (A, B) l'est.

Propriétés :

1. $(A_t,\ t \geq 0)$ n'est pas Markovien. Par contre (A, B) l'est.
2. On connaît l'expression de la densité :

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(A_T \in dz) = \frac{\Gamma(2/3)}{\pi 2^{1/3} 3^{1/6}} \frac{|y|}{|z-x|^{4/3}} e^{-2y^3/9|z-x|} \mathbf{1}_{\mathbf{A}}(z) dz$$

avec $\mathbf{A} = (x, +\infty)$ si $y > 0$, $\mathbf{A} = (-\infty, x)$ si $y < 0$.

Propriétés :

1. $(A_t,\ t \geq 0)$ n'est pas Markovien. Par contre (A, B) l'est.
2. On connaît l'expression de la densité :

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(A_T \in dz) = \frac{\Gamma(2/3)}{\pi 2^{1/3} 3^{1/6}} \frac{|y|}{|z-x|^{4/3}} e^{-2y^3/9|z-x|} \mathbf{1}_{\mathbf{A}}(z) dz$$

avec $\mathbf{A} = (x, +\infty)$ si $y > 0$, $\mathbf{A} = (-\infty, x)$ si $y < 0$.

3. On en déduit une égalité en loi, sous $\mathbb{P}_{(0,1)}$:

$$A_T \stackrel{d}{=} \frac{1}{9\Gamma_{\frac{1}{3}}}$$

En particulier la loi de A_T est auto-décomposable, c'est à dire :

$$\forall c > 0, \ \exists X_c, \ A_T \stackrel{d}{=} cA_T + X_c,$$

où X_c variable indépendante de A_T.

$\rightarrow$ On étudie un processus de Lévy qui saute.

$\rightarrow$ On étudie un processus de Lévy qui saute.

$\rightarrow$ On étend l'étude pour des processus α-stables.

$\rightarrow$ On étudie un processus de Lévy qui saute.

$\rightarrow$ On étend l'étude pour des processus α-stables.

Dans la suite :

1. $(Z_t^\alpha, t \geq 0)$ processus Lévy α-stable. A^α son aire.

$\rightarrow$ On étudie un processus de Lévy qui saute.

$\rightarrow$ On étend l'étude pour des processus α-stables.

Dans la suite :

1. $(Z_t^\alpha, t \geq 0)$ processus Lévy α-stable. A^α son aire.
2. On fait partir (A, Z) de $(0, 1)$

$\rightarrow$ On étudie un processus de Lévy qui saute.

$\rightarrow$ On étend l'étude pour des processus α-stables.

Dans la suite :

1. $(Z_t^\alpha, t \geq 0)$ processus Lévy α-stable. A^α son aire.
2. On fait partir (A, Z) de $(0, 1)$
3. Z^α est spectrallement positif.

Plan

1. Cas du mouvement brownien
   - Mouvement brownien
   - Sur l'Aire du processus
   - Quelques propriétés
   - Ce qu'on cherche à étendre
2. Cas du Lévy stable
   - Un outil important
   - Résultat principal
   - Conséquences
3. Perspectives

Définition

La tranformée de Mellin d'une variable aléatoire X de densité f, est définie par $\forall s \in I_X$:

$$\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}\left(X^s\right) = \int_0^{+\infty} x^s f(x) dx.$$

Définition

La tranformée de Mellin d'une variable aléatoire X de densité f, est définie par $\forall s \in I_X$:

$$\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}\left(X^s\right) = \int_0^{+\infty} x^s f(x)dx.$$

Propriétés importantes :

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\forall s$:
$$\mathcal{M}_{X\times Y}(s) = \mathcal{M}_X(s)\mathcal{M}_Y(s)$$
2. $(\forall s,\ \mathcal{M}_Y(s) = \mathcal{M}_X(s)) \Rightarrow \left(X \overset{d}{=} Y\right)$.

On note : $\mathbf{Z}_\beta$ la loi stable positive d'indice β, ($\beta < 1$) et $\mathbf{B}_{a,b}$ la loi Bêta d'indice $a, b > 0$ et de densité :

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)dx.$$

On note : $\mathbf{Z}_\beta$ la loi stable positive d'indice β, $(\beta < 1)$ et $\mathbf{B}_{a,b}$ la loi Bêta d'indice $a, b > 0$ et de densité :

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)dx.$$

Théorème

On la décomposition suivante :

$$A_T^\alpha \stackrel{d}{=} \left(\frac{\alpha+1}{4}\right) \times \mathbf{Z}^{2}_{\frac{2}{\alpha+1}} \times \mathbf{B}^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)}}$$

Idée de démonstration :
Par autosimilarité et la propriété de Markov on obtient

$$\mathbb{E}_{(0,1)}[|Z_S^\alpha|^{s-1}] = \mathbb{E}\left[(A_T^\alpha)^{\frac{s-1}{1+\alpha}}\right] \times \mathbb{E}_{(1,0)}[|Z_S^\alpha|^{s-1}],$$

$$\forall s < 1/(\alpha+1) : \ \mathbb{E}\left[(A_T^\alpha)^s\right] = \frac{\mathbb{E}_{(0,1)}[|Z_S^\alpha|^{(1+\alpha)s}]}{\mathbb{E}_{(1,0)}[|Z_S^\alpha|^{(1+\alpha)s}]}$$

$$= \left(\frac{1+\alpha}{4}\right)^s \times \underbrace{\frac{\Gamma(1-(\alpha+1)s)}{\Gamma(1-2s)}}_{\mathbb{E}[\mathbf{Z}^{2s}_{\frac{2}{\alpha+1}}]} \times \underbrace{\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{\alpha+1})\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{\alpha+1}-s)}}_{\mathbb{E}[\mathbf{B}^{-s}_{\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)}}]},$$

Quelque remarques sur la densité :

Corollaire

La densité de A_T^α admet une représentation en série, pour $x > 0$:

$$f_{A_T^\alpha}(x) = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha+1)^{\frac{n+1}{1+\alpha}-1} x^{-\frac{n+1}{1+\alpha}-1}}{n!\,\Gamma(1-\frac{n+1}{\alpha+1})\Gamma(1-\frac{n+2}{\alpha+1})},$$

En particulier :

$$f_{A_T^2}(x) = \frac{\Gamma(2/3)\, x^{-4/3}\, e^{-\frac{1}{9x}}}{2\pi\, 3^{1/6}},$$

$$\Rightarrow f_{A_T^\alpha}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{1+\alpha}-1} x^{-\frac{1}{1+\alpha}-1}}{\Gamma(\frac{\alpha-1}{\alpha+1})}$$

Corollaire

On a un comportement asympotique en 0 :

$$f_{A_T^\alpha}(x) \underset{0}{\sim} \kappa \, x^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}} \, e^{-c_\alpha \, x^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

with

$$\kappa = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{2\pi\,(\alpha+1)^{\frac{\alpha}{\alpha^2-1}}}, \quad c_\alpha = (\alpha-1)(\alpha+1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Quelques remarques sur la loi :

Corollaire

La variable A_T^{α} est infiniement divisible et même auto-décomposable.

Plan

1. Cas du mouvement brownien
   - Mouvement brownien
   - Sur l'Aire du processus
   - Quelques propriétés
   - Ce qu'on cherche à étendre
2. Cas du Lévy stable
   - Un outil important
   - Résultat principal
   - Conséquences
3. Perspectives

Considérer un processus avec des sauts négatifs.

$\Rightarrow$ On s'intéresse à A_T avec

$$T = \inf\{t > 0,\ Z_t^\alpha < 0\}$$

.

Considérer des fonctionnelles particulières

$$A(\alpha, q) = \int_0^T (Z_s^\alpha)^q \, ds.$$