Minimiseurs de la variation totale

Gwenael Mercier

CMAP, École polytechnique

14 octobre 2014

La TV : pour quoi faire ?

Idée : chercher l'image originale u à partir de l'image bruitée g comme minimiseur de

$$\int_\Omega F(u) + d(u, g).$$

Les fonctionnelles quadratiques, c'est pratique !

On essaie de minimiser (disons dans H^1)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{(u-g)^2}{2}.$$

Ce n'est pas surprenant : les fonctions dans H^1 ne peuvent pas présenter de grandes discontinuités (en dimension 1, elles sont Hölder). En particulier,

Il faut donc gérer les bords différemment.

On va minimiser

$$\int_\Omega |\nabla u| + \frac{(u-g)^2}{2}.$$

Où ? Dans BV ! Une fonction $f \in L^1_{loc}$ est dite à variation bornée si sa dérivée (au sens des distributions) est une mesure. En outre,

$$TV(f) = \sup\left\{ -\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\phi \;\middle|\; \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),\ \|\phi\|_\infty \leqslant 1 \right\}.$$

Du coup, par définition, f est à variation bornée si $TV(f)$ est finie.

Et c'est mieux

Code de Pascal Getreuer.

Question : est-il possible de lier la régularité de u à celle de g si

$$u = \arg\min_{u \in BV} \int_\Omega |\nabla u| + \frac{(u-g)^2}{2} \quad ?$$

- Les sauts de u sont ils contenus dans les sauts de g ?
- Si g est continue, u l'est-elle aussi ?
- Si g est Hölder ou Lipschitz, que peut-on dire de u ?

On va s'intéresser à la deuxième question.

Quelques outils

Définition

On dit que E est un ensemble de périmètre fini si son indicatrice 1_E est à variation bornée. On note

$$Per(E) = TV(1_E).$$

Cette définition coïncide avec la mesure de l'aire des surfaces lisses. On a, pour tout (E, F) à périmètre fini,

$$P(E \cap F) + P(E \cup F) \leqslant P(E) + P(F).$$

La formule de la coaire : un Fubini amélioré

Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $g \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega g(x)|\nabla u(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{u^{-1}(t)} g(x)\,dH_{n-1}(x) \right) dt.$$

En particulier, avec $g = 1$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u| = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(u^{-1}(t)).$$

On peut montrer que cette dernière formule est toujours vraie avec $u \in BV$, en écrivant

$$\int_\Omega |\nabla u| = \int_{-\infty}^{+\infty} Per(\{u > t\})dt.$$

On peut alors montrer le

Théorème

Les deux formules suivantes sont équivalentes

$$u = \arg\min_{u \in BV} \int_\Omega |\nabla u| + \frac{(u-g)^2}{2}$$

et

$E_s = \{u > s\}$ *est un minimiseur de*

$$Per(E) + \int_E s - g(x) dx.$$

Or, montrer que u est continue, c'est exactement montrer que $\partial E_s \cap \partial E_t = \emptyset$ pour tous $s \neq t$.

Sur les surfaces minimales

On simplifie le problème et on s'intéresse aux ensembles de périmètre fini qui minimisent $Per(E)$ dans un ouvert Ω, c'est-à-dire que

$$\forall F,\ F \Delta E \Subset \Omega, \quad Per(E) \leqslant Per(F).$$

On cherche alors à montrer que si E et $\tilde{E}$ sont deux ensembles minimisant dans Ω et vérifiant $E \subset \tilde{E}$, alors $E \subsetneq \tilde{E}$.

Le cas lisse

Si ∂E et $\partial \tilde{E}$ sont lisses, on peut, quitte à réduire Ω, supposer que ce sont des graphes de fonctions φ et $\tilde{\varphi}$ dans Ω. Les fonctions φ et $\tilde{\varphi}$ vérifient alors l'équation

$$F(\nabla\varphi) := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1+\nabla\varphi^2}}\right) = 0.$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
0 = F(\nabla\varphi) - F(\nabla\tilde{\varphi}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(F(\nabla\varphi + t(\nabla\tilde{\varphi} - \nabla\varphi))\right) dt \\
&= \int_0^1 dF(\nabla\varphi + t(\nabla\tilde{\varphi} - \nabla\varphi))\nabla(\varphi - \tilde{\varphi})dt \\
&= \left(\int_0^1 dF(\nabla\varphi + t(\nabla\tilde{\varphi} - \nabla\varphi))dt\right)\nabla(\varphi - \tilde{\varphi})
\end{aligned}
$$

qui est la forme faible d'une équation du type

$$\mathrm{div}(A(x)\nabla(\varphi - \tilde{\varphi})) = 0.$$

On vérifie que A est uniformément définie positive ($(A(x)Y, Y) \geqslant \lambda|Y|^2$ avec $\lambda > 0$) et que donc $\varphi - \tilde{\varphi}$ ne peut atteindre son minimum à l'intérieur de Ω, sauf à être constante...

Mais les surfaces minimales ne sont pas forcément lisses

Exemple : le cône de Simons

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\} \subset \mathbb{R}^8$$

est une surface minimale qui a une singularité en 0...

Principe du maximum en toute généralité

Théorème (Simon, 1987)

Le résultat précédent sur les graphes est encore vrai pour des surfaces minimales avec singularités.

La démonstration utilise des outils nettement plus subtils comme

- Formule de monotonie
- Existence de cônes tangents (limite de $\{\frac{1}{\lambda}x \,|x \in E\}$)
- Résultats de comparaison pour des EDP elliptiques sur des cônes minimaux (Bombieri, Giusti...)

Un peu plus de régularité dans le cas lisse

On revient à minimiser

$$u = \operatorname*{arg\,min}_{u \in BV} \int_\Omega |\nabla u| + \frac{(u-g)^2}{2}.$$

On suppose que Ω est strictement convexe et que g est ω-uniformément continue. Alors u est aussi ω-uniformément continue (Caselles, Chambolle, Novaga, 2007).

Pour montrer cela, on s'intéresse, pour $s < t$, à $E_s = \{u > s\}$ et $E_t = \{u > t\}$ et on montre qu'il y a une distance contrôlée entre leur bord.