Votre cortex visuel héberge une représentation du groupe des déplacements

Alexandre Afgoustidis

Institut de mathématiques de Jussieu -Paris Rive Gauche

Rennes, 15 octobre 2014

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie :

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie :
  Quand G est un groupe, X un G-espace,
  si $F : X \to \mathbb{C}$ est G-invariante et $S = F^{-1}(0)$ un singleton,
  S est un point fixe pour l'action de G.

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie : si un problème invariant a une solution unique, cette solution est invariante aussi.

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie : si un problème invariant a une solution unique, cette solution est invariante aussi.
- Le principe de relativité.

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie : si un problème invariant a une solution unique, cette solution est invariante aussi.
- Le principe de relativité. Les équations

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

"devraient" être invariantes par le *Groupe de Galilée*...

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie : si un problème invariant a une solution unique, cette solution est invariante aussi.
- Le principe de relativité. Les équations de Maxwell devraient être invariante par le groupe de Galilée... mais elles ne le sont pas !

Deux usages des groupes en physique, avant 1930

- Le principe de Curie : si un problème invariant a une solution unique, cette solution est invariante aussi.
- Le principe de relativité. Les équations de Maxwell devraient être invariante par le groupe de Galilée... mais elles ne le sont pas !

$\rightsquigarrow$ Ordonner ce qu'on sait, le renverser parfois...

Hermann Weyl (1885 -1955)

The investigation of groups first becomes a connected and complete theory in the theory of the representation of groups by linear transformations, and it is exactly this mathematically most important part which is necessary for an adequate description of the quantum mechanical relations. All quantum numbers, with the exception of the so-called principal quantum number, are indices characterizing representations of groups.

Les représentations linéaires

- Une représentation du groupe G est un morphisme de G dans le groupe linéaire d'un espace vectoriel.

Les représentations linéaires

- Une représentation unitaire du groupe G est un morphisme de G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ d'un espace de Hilbert.

Les représentations linéaires

- Une représentation unitaire du groupe topologique G est un morphisme continu de G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ d'un espace de Hilbert.

- Une représentation unitaire T est irréductible si les seuls sous-espaces $T(G)$-stables et fermés de H sont $\{0\}$ et H.

Les représentations linéaires

- Une représentation unitaire du groupe topologique G est un morphisme continu de G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ d'un espace de Hilbert.

- Une représentation unitaire T est irréductible si les seuls sous-espaces $T(G)$-stables et fermés de H sont $\{0\}$ et H.
- Exemple si $G = \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$: le morphisme $x \mapsto e^{ikx}\ \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$.

Les représentations linéaires

- Une représentation unitaire du groupe topologique G est un morphisme continu de G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ d'un espace de Hilbert.

- Une représentation unitaire T est irréductible si les seuls sous-espaces $T(G)$-stables et fermés de H sont $\{0\}$ et H.
- Exemple si $G = \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$: le morphisme $x \mapsto e^{ikx}\ \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$.
- Si G est compact, les représentations unitaires irréductibles sont de dimension finie.

Les représentations linéaires

- Une représentation unitaire du groupe topologique G est un morphisme continu de G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ d'un espace de Hilbert.

- Une représentation unitaire T est irréductible si les seuls sous-espaces $T(G)$-stables et fermés de H sont $\{0\}$ et H.
- Exemple si $G = \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$: le morphisme $x \mapsto e^{ikx}\ \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$.
- Si G est compact, les représentations unitaires irréductibles sont de dimension finie.
- Si (X, μ) est un G-espace mesuré, $\mathbb{L}^2(X, \mu)$ porte une représentation unitaire non irréductible de G.

Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ? (1939)

Si P est le groupe de Poincaré $SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe de $GA(\mathbb{R}^4)$ qui permute les solutions des équations de Maxwell ,

Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ? (1939)

Si P est le groupe de Poincaré $SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe de $GA(\mathbb{R}^4)$ qui permute les solutions des équations de Maxwell ,

l'espace des solutions des équations de Maxwell qui sont lisses et $\mathbb{L}^2$ porte une représentation irréductible de P.

Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ? (1939)

Classification
(ou plutôt, définition !)
par Wigner des particules
élémentaires :

l'espace des états d'une particule élémentaire porte une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré

Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ? (1939)

Classification
(ou plutôt, définition !)
par Wigner des particules
élémentaires :

l'espace des états d'une particule élémentaire porte une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré (ou de son revêtement universel).

Demain, en biologie...

Il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les solides, et l'expérience nous montre que les divers mouvements possibles de ces corps sont reliés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe euclidien. Ainsi, les hypothèses fondamentales de la Géométrie ne sont pas des faits expérimentaux ; c'est cependant l'observation de certains phénomènes physiques qui les fait choisir parmi tous les phénomènes possibles.

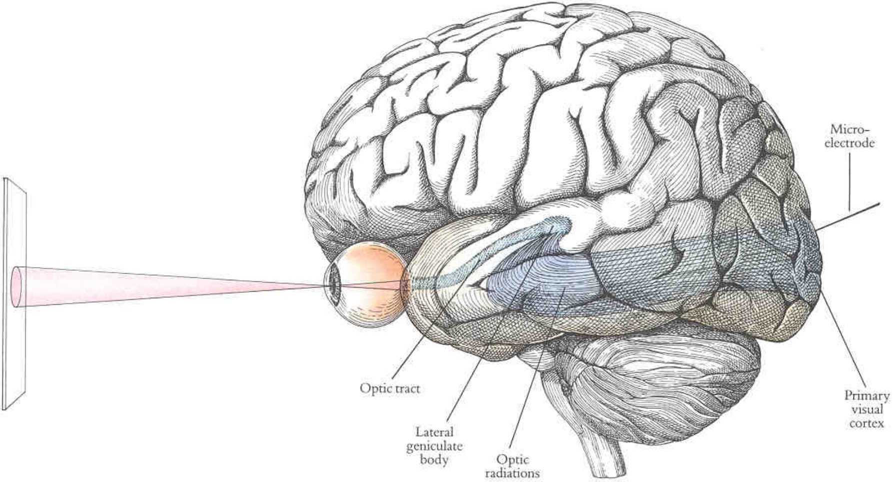
Demain, en biologie...

La structure de groupe, au lieu d'être tirée de l'expérience, par une abstraction simple à partir de l'objet, est découverte au cours des expériences, c'est-à-dire des actions exercées sur l'objet, mais par abstraction constructive à partir des coordinations même de l'action.

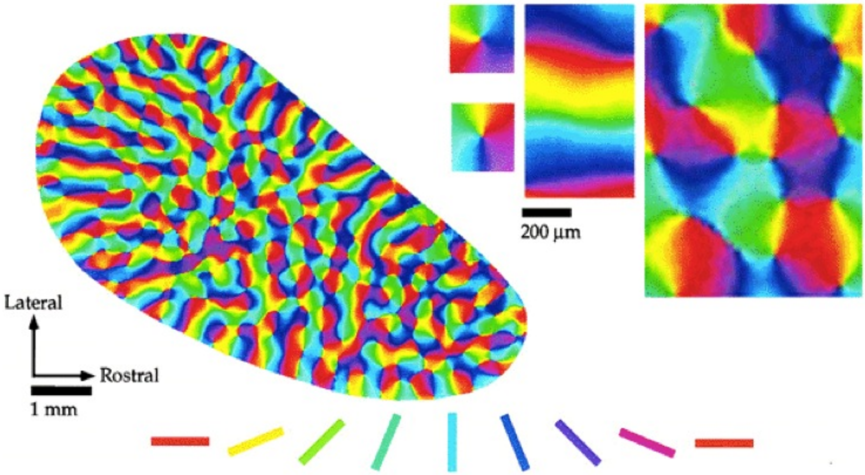
Demain, en biologie...

We begin with some general but vague principle, then find an important case where we can give that notion a concrete precise meaning, and from that case we gradually rise again to generality, guided more by mathematical construction and abstraction than by the mirages of philosophy ; and if we are lucky we end up with an idea no less universal than the one from which we started. Gone may be much of its emotional appeal, but it has the same or even greater unifying power in the realm of thought and is exact instead of vague.

Direction l'aire V1



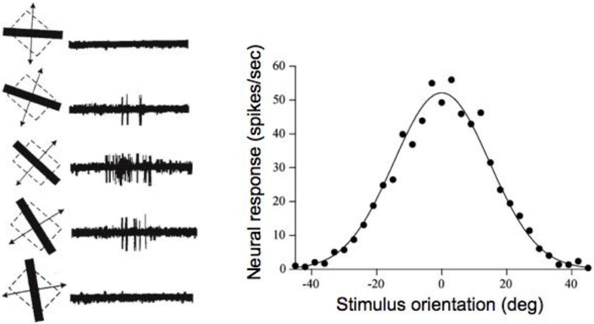
Direction l'aire V1



Direction l'aire V1

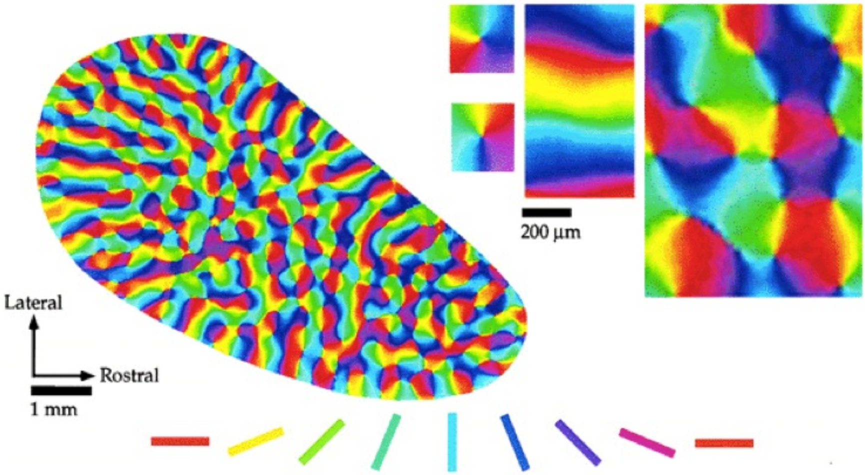
Direction l'aire V1

V1 physiology: orientation selectivity

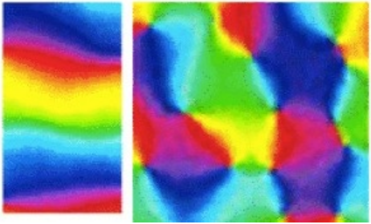


Hubel & Wiesel, 1968

Direction l'aire V1



Direction l'aire V1



Soit Λ la distance moyenne entre deux "neurones" préférant la même orientation.

Nb. moyen de singularités dans un carré de côté Λ :

$$3.14 \pm 2\%(!!)$$

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

- Soit $\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^2$...

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

- Soit $\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^2$...
  ... dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}(0, \frac{2\pi}{\Lambda})$.

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

Si f est lisse à support compact de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$,

si $A \in SO(2)$ et $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{F}\left\{x \mapsto f(A\,x + u)\right\} = \left\{k \mapsto e^{ik\cdot u}\mathcal{F}(f)\,(A\,k)\right\}$$

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

- Soit $\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^2$...
  ... dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}(0, \frac{2\pi}{\Lambda})$.

- Le groupe des déplacements du plan $E(2)$ agit sur l'espace $\mathcal{E}_\Lambda$.

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

- Soit $\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^2$...
  ... dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}(0, \frac{2\pi}{\Lambda})$.

- Le groupe des déplacements du plan $E(2)$ agit sur l'espace $\mathcal{E}_\Lambda$.

Transport du produit scalaire $\mathbb{L}^2$ sur $\mathcal{C}(0, \frac{2\pi}{\Lambda})$ $\rightsquigarrow$

Une représentation irréductible du groupe des déplacements

- Soit $\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^2$...
  ... dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}(0, \frac{2\pi}{\Lambda})$.

- Le groupe des déplacements du plan $E(2)$ agit sur l'espace $\mathcal{E}_\Lambda$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}_\Lambda^{\mathbb{L}^2}$ porte une représentation unitaire irréductible de $E(2)$.

Un champ aléatoire gaussien

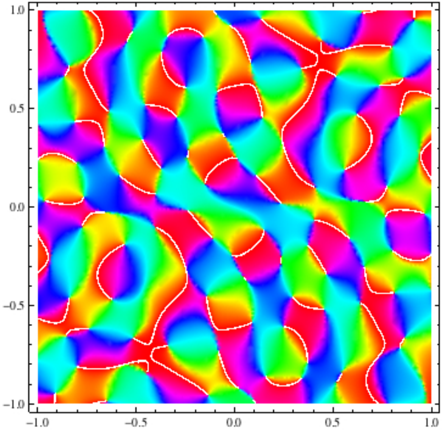
Il existe un *champ aléatoire gaussien complexe* Φ_Λ, défini canoniquement à partir de cette représentation, qui est à valeurs dans $\mathcal{E}_\Lambda$.

Un champ aléatoire gaussien

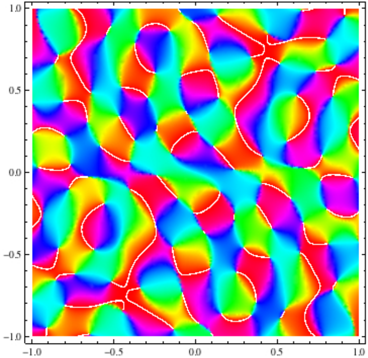
Il existe un *champ aléatoire gaussien complexe* Φ_Λ, défini canoniquement à partir de cette représentation, qui est à valeurs dans $\mathcal{E}_\Lambda$.

Faisons un tirage et traçons l'argument de la fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^2$ obtenue :

Un champ aléatoire gaussien

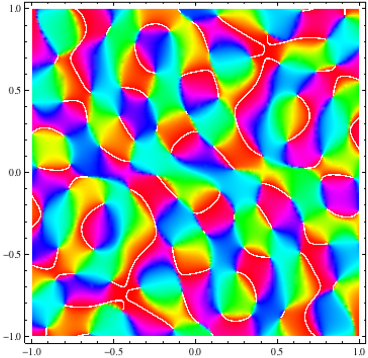


Un champ aléatoire gaussien



Un segment de droite de longueur Λ (resp. $< \Lambda$, $> \Lambda$) contient en moyenne 1 (resp. moins d'un, plus d'un) point par orientation préférée possible.

Un champ aléatoire gaussien



Soit $\mathcal{N}_U$ la variable aléatoire enregistrant le nombre de zéros de Φ_Λ dans $U \subset \mathbb{R}^2$.

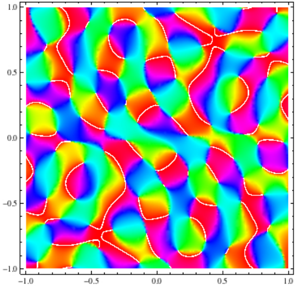
$$\frac{\mathbb{E}\left(\mathcal{N}_U\right)}{\text{Aire(U)}} = \frac{\pi}{\Lambda^2}$$

Le groupe d'Euclide... obligatoire ?

Champs aléatoires gaussiens analogues sur des espaces homogènes G/K, qui explorent certaines représentations irréductibles de G.

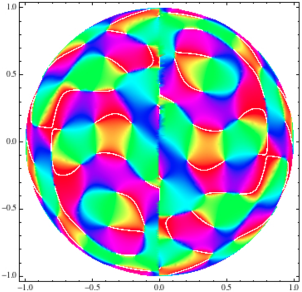
Le groupe d'Euclide... obligatoire ?

Le groupe d'Euclide... obligatoire ?

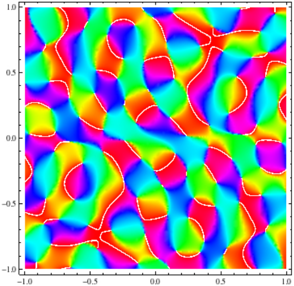


$$X = \mathbb{R}^2 = E(2)/SO(2)$$

Le groupe d'Euclide... obligatoire ?

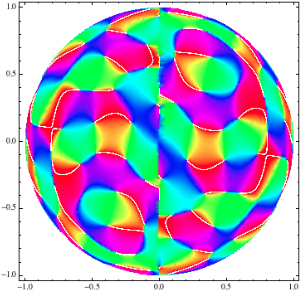


$X = \mathbb{S}^2$, $G = SO(3)$

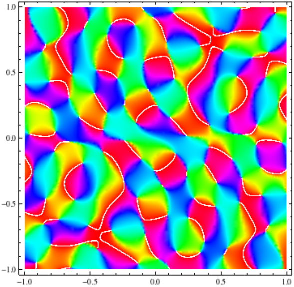


$X = \mathbb{R}^2 = E(2)/SO(2)$

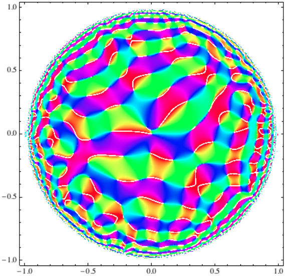
Le groupe d'Euclide... obligatoire ?



$X = \mathbb{S}^2, \; G = SO(3)$

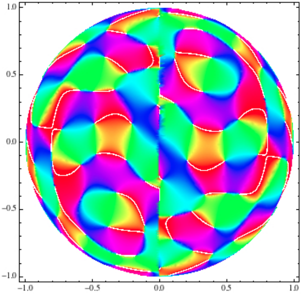


$X = \mathbb{R}^2 = E(2)/SO(2)$

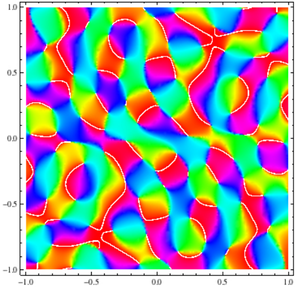


$X = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$

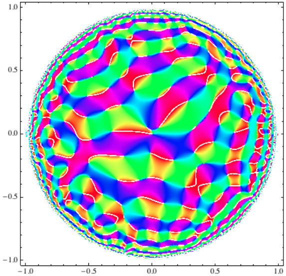
Le groupe d'Euclide... obligatoire ?



$X = \mathbb{S}^2$, $G = SO(3)$
$X = G/K$, G
semisimple compact

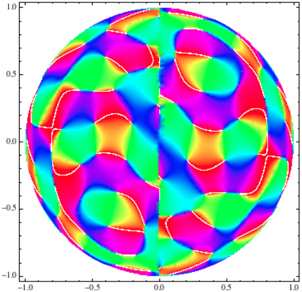


$X = \mathbb{R}^2 = E(2)/SO(2)$
$X = \mathbb{R}^n$, $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$,
$K \subset SO(n)$.

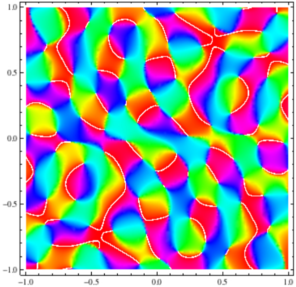


$X = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$
$X = G/K$, $G = KAN$
semisimple, K compact
maximal

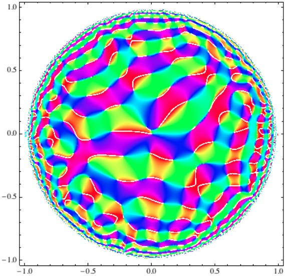
Le groupe d'Euclide... obligatoire ?



$X = \mathbb{S}^2$, $G = SO(3)$
$X = G/K$, G
semisimple compact



$X = \mathbb{R}^2 = E(2)/SO(2)$
$X = \mathbb{R}^n$, $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$,
$K \subset SO(n)$.



$X = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$
$X = G/K$, $G = KAN$
semisimple, K compact maximal

Le groupe d'Euclide... obligatoire ?

Soit Λ la distance géodésique moyenne entre deux points où on trouve la même "orientation". Alors

1. On peut évaluer Λ, lié à une valeur propre du laplacien invariant sur G/K ;
2. L'espérance du nombre de singularités dans un "cube géodésique" de côté Λ est

$$\pi^{dim(X)/2}.$$

Et demain ?

Fin de mon exposé

Merci !