Analogies entre corps de nombres et corps de fonctions

Florent Demeslay

Rencontres doctorales Lebesgue
15 octobre 2014

Les objets de base

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Les objets de base

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, no head] \\
\mathbb{R} \arrow[d, no head] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, no head, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Les objets de base

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

Les objets de base

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$A := \mathbb{F}_q[\theta]$$

Les objets de base

$$\begin{array}{c}\mathbb{C}\\ \Big|\,2\\ \mathbb{R}\\ \Big|\,\text{complété}\\ \mathbb{Q}\\ \Big|\,\mathrm{Frac}\\ \mathbb{Z}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}K := \mathbb{F}_q(\theta)\\ \Big|\,\mathrm{Frac}\\ A := \mathbb{F}_q[\theta]\end{array}$$

Les objets de base

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}$$

Les objets de base

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty := \widehat{K_\infty} \arrow[d, dash, "\infty"] \\
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}
$$

Les objets de base

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \arrow[d, dash, "\infty"] \\
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

K_∞/A compact

Les objets de base

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \Big| \; 2 \\ \mathbb{R} \\ \Big| \; \text{complété} \\ \mathbb{Q} \\ \Big| \; \mathrm{Frac} \\ \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \\ \Big| \; \infty \\ K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \\ \Big| \; \text{complété} \\ K := \mathbb{F}_q(\theta) \\ \Big| \; \mathrm{Frac} \\ A := \mathbb{F}_q[\theta] \end{array}$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$

K_∞/A compact

Les objets de base

$$\begin{array}{c|l} \mathbb{C} & \\ & 2 \\ \mathbb{R} & \\ & \text{complété} \\ \mathbb{Q} & \\ & \mathrm{Frac} \\ \mathbb{Z} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} & \\ & \infty \\ K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) & \\ & \text{complété} \\ K := \mathbb{F}_q(\theta) & \\ & \mathrm{Frac} \\ A := \mathbb{F}_q[\theta] & \end{array}$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$$

K_∞/A compact

$$\#A^\times = \#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$$

Les objets de base

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \arrow[d, dash, "\infty"] \\
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}/\{\pm 1\}$

K_∞/A compact

$\#A^\times = \#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$

Les objets de base

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \arrow[d, dash, "\infty"] \\
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}/\{\pm 1\}$$

K_∞/A compact

$$\#A^\times = \#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$$

$$A_+ = \{\text{unitaires}\} = A/\mathbb{F}_q^\times$$

Les objets de base

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\ \mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\ \mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\ \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \arrow[d, dash, "\infty"] \\ K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\ K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\ A := \mathbb{F}_q[\theta] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}/\{\pm 1\}$$

$\mathbb{Z}$-modules $\Rightarrow \#$

K_∞/A compact

$$\#A^\times = \#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$$

$$A_+ = \{\text{unitaires}\} = A/\mathbb{F}_q^\times$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{R} \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{K_\infty}} \arrow[d, dash, "\infty"] \\
K_\infty := \mathbb{F}_q((\theta^{-1})) \arrow[d, dash, "\text{complété}"] \\
K := \mathbb{F}_q(\theta) \arrow[d, dash, "\mathrm{Frac}"] \\
A := \mathbb{F}_q[\theta]
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact

$\#\mathbb{Z}^\times = \#\{\pm 1\} = 2$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}/\{\pm 1\}$

$\mathbb{Z}$-modules $\Rightarrow \#$

K_∞/A compact

$\#A^\times = \#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$

$A_+ = \{\text{unitaires}\} = A/\mathbb{F}_q^\times$

A-modules $\Rightarrow \mathrm{Fitting}$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N} \qquad\qquad \exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp_C(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

morphisme de $\mathbb{F}_q$-ev

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules où

$$\begin{array}{cccc} C\colon & A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{C}_\infty) \\ & \theta & \longmapsto & \theta + \tau \end{array}$$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp \colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C \colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules où

$$C \colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{C}_\infty) \\ \theta & \longmapsto & \theta + \tau \end{array}$$

et $\tau(x) = x^q$.

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules où

$$C\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{C}_\infty) \\ \theta & \longmapsto & \theta + \tau \end{array}$$

et $\tau(x) = x^q$.
Ex : $C_\theta(x) = \theta x + x^q$

Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules où

$$C\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{C}_\infty) \\ \theta & \longmapsto & \theta + \tau \end{array}$$

et $\tau(x) = x^q$.
Ex : $C_\theta(x) = \theta x + x^q$
$C_{\theta^2}(x) = \theta^2 x + (\theta + \theta^q)x^q + x^{q^2}$

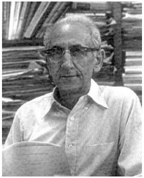
Fonction exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } n! \in \mathbb{N}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

morphisme de $\mathbb{Z}$-modules



Leonard Carlitz
1907-1999

$$\exp_C(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \quad \text{où } D_i \in A$$

$$\exp_C(z_1 + z_2) = \exp_C(z_1) + \exp_C(z_2)$$

$$\exp_C : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow C(\mathbb{C}_\infty)$$

morphisme de A-modules où

$$\begin{array}{cccc} C: & A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{C}_\infty) \\ & \theta & \longmapsto & \theta + \tau \end{array}$$

et $\tau(x) = x^q$.
Ex : $C_\theta(x) = \theta x + x^q$
$C_{\theta^2}(x) = \theta^2 x + (\theta + \theta^q)x^q + x^{q^2}$
C'est le module de Carlitz !

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\mathrm{alg}\} & \rightarrow & \{\mathbb{Z}-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array}$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\mathrm{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\mathrm{alg}\} & \to & \{A-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m \colon \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\mathrm{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C \colon \begin{array}{ccc} \{A-\mathrm{alg}\} & \to & \{A-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \mathrm{Fitt}\, C(F) = \mathrm{Fitt}\, F - 1$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\text{alg}\} & \to & \{A-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \text{Fitt}\, C(F) = \text{Fitt}\, F - 1$$

$$\ker \exp = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z} - \text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z} - \text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A - \text{alg}\} & \to & \{A - \text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\# F^* = \# F - 1 \qquad \text{Fitt}\, C(F) = \text{Fitt}\, F - 1$$

$$\ker \exp = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \qquad \ker \exp_C = \tilde{\pi} A$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\text{alg}\} & \to & \{A-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \operatorname{Fitt} C(F) = \operatorname{Fitt} F - 1$$

$$\ker \exp = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \qquad \ker \exp_C = \tilde{\pi} A$$

$$\tilde{\pi} = (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i \geq 1} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1}$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\mathrm{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\mathrm{alg}\} & \to & \{A-\mathrm{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \mathrm{Fitt}\, C(F) = \mathrm{Fitt}\, F - 1$$

$$\ker \exp = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \qquad \ker \exp_C = \tilde{\pi} A$$

$$\tilde{\pi} = (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i \geq 1} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1}$$

Lindemann, 1882 : π transcendant

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array}$$

$$C : \begin{array}{ccc} \{A-\text{alg}\} & \to & \{A-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1$$

$$\text{Fitt}\, C(F) = \text{Fitt}\, F - 1$$

$$\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$$

$$\ker \exp_C = \tilde{\pi} A$$

$$\tilde{\pi} = (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i \geq 1} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1}$$

Lindemann, 1882 : π transcendant

Wade, 1940' : $\tilde{\pi}$ transcendant

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\text{alg}\} & \to & \{A-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \text{Fitt}\, C(F) = \text{Fitt}\, F - 1$$

$$\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z} \qquad \ker \exp_C = \tilde{\pi} A$$

$$\tilde{\pi} = (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i \geq 1} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1}$$

LINDEMANN, 1882 : π transcendant

WADE, 1940' : $\tilde{\pi}$ transcendant

$$e^{i\pi} = -1$$

Module de Carlitz et noyau

$$\mathbb{G}_m : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}-\text{alg}\} & \to & \{\mathbb{Z}-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & F^* \end{array} \qquad C : \begin{array}{ccc} \{A-\text{alg}\} & \to & \{A-\text{mod}\} \\ F & \mapsto & C(F) \end{array}$$

$$\#F^* = \#F - 1 \qquad \operatorname{Fitt} C(F) = \operatorname{Fitt} F - 1$$

$$\ker \exp = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \qquad \ker \exp_C = \tilde{\pi}A$$

$$\tilde{\pi} = (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i \geq 1} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1}$$

LINDEMANN, 1882 : π transcendant

WADE, 1940' : $\tilde{\pi}$ transcendant

$$e^{i\pi} = -1 \qquad \exp_C(\tilde{\pi}) = 0$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P \in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P \in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P \in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Sommation par degré $\Rightarrow \mathbb{Z}$
Converge en 1

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

$$\zeta(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid n \\ & \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P\in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Sommation par degré $\Rightarrow \mathbb{Z}$
Converge en 1

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

$$\zeta(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid n \\ & \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P\in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Sommation par degré $\Rightarrow \mathbb{Z}$
Converge en 1

$$\zeta_C(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q-1 \mid n \\ & \end{cases}$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

$$\zeta(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid n \\ \alpha & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

Avec $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P\in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Sommation par degré $\Rightarrow \mathbb{Z}$
Converge en 1

$$\zeta_C(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q-1 \mid n \\ & \end{cases}$$

Fonction zêta aux entiers négatifs

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Prolongement analytique $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
Diverge en 1, pôle simple, résidu 1

$$\zeta(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid n \\ \alpha & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

Avec $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_C(n) := \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^n} = \prod_{\substack{P\in A_+ \\ \text{premier}}} \left(1 - \frac{1}{P^n}\right)^{-1}$$

Sommation par degré $\Rightarrow \mathbb{Z}$
Converge en 1

$$\zeta_C(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q-1 \mid n \\ \beta & \text{si } q-1 \nmid n \end{cases}$$

Avec $0 \neq \beta \in A$.

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q}$$

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X)-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n pair, *i.e.* $q-1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K$$

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n pair, *i.e.* $q - 1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2\mathrm{i}\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n pair, *i.e.* $q - 1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

Pour n pair, *i.e.* $q - 1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n pair, *i.e.* $q - 1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

- Apéry, 1979 : $\zeta(3)$ irrationnel

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X)-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n pair, *i.e.* $q-1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n\geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

- Apéry, 1979 : $\zeta(3)$ irrationnel
- Rivoal, 2000 : infinité de $\zeta(2k+1)$ irrationnels

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

- Apéry, 1979 : $\zeta(3)$ irrationnel
- Rivoal, 2000 : infinité de $\zeta(2k+1)$ irrationnels
- Conjecture : transcendance

Pour n pair, *i.e.* $q - 1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X)-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

- Apéry, 1979 : $\zeta(3)$ irrationnel
- Rivoal, 2000 : infinité de $\zeta(2k+1)$ irrationnels
- Conjecture : transcendance

Pour n pair, *i.e.* $q-1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n\geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Pour n impair, *i.e.* $q-1 \nmid n$:

Fonction zêta aux entiers positifs

Pour n pair, *i.e.* $2 \mid n$:

$$\frac{\zeta(n)}{(2i\pi)^n} = -\frac{B_n}{2n!} \in \mathbb{Q} \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp(X)-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

$\Rightarrow \zeta(n)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$

Pour n impair, *i.e.* $2 \nmid n$:

- Apéry, 1979 : $\zeta(3)$ irrationnel
- Rivoal, 2000 : infinité de $\zeta(2k+1)$ irrationnels
- Conjecture : transcendance

Pour n pair, *i.e.* $q-1 \mid n$:

$$\frac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n} = \frac{BC_n}{\Pi(n)} \in K \quad \text{où}$$

$$\frac{X}{\exp_C(X)} = \sum_{n\geq 0} \frac{BC_n}{\Pi(n)} X^n$$

$\Rightarrow \zeta_C(n)$ transcendant sur K

Pour n impair, *i.e.* $q-1 \nmid n$:

Yu, 1988 :

$\zeta_C(n)$ et $\dfrac{\zeta_C(n)}{\tilde{\pi}^n}$ transcendants

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}\, h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie

Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;
- $H(C(\mathcal{O}_L))$: module de classes ;

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;
- $H(C(\mathcal{O}_L))$: module de classes ;
- $[\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]$: régulateur.

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;
- $H(C(\mathcal{O}_L))$: module de classes ;
- $[\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]$: régulateur.

D., 2014 :
$\mathbb{F}_q \rightsquigarrow \mathbb{F}_q(t_1, \dots, t_s)$

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;
- $H(C(\mathcal{O}_L))$: module de classes ;
- $[\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]$: régulateur.

D., 2014 :
$\mathbb{F}_q \rightsquigarrow \mathbb{F}_q(t_1, \dots, t_s)$
C (dim 1) $\rightsquigarrow C^{\otimes n}$ (dim n)

Formule de classes

$K/\mathbb{Q}$ finie

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K}{w_K\sqrt{|D_K|}}h_K$$

- ζ_K : zêta de Dedekind ;
- r_1, r_2 : nb plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
- w_K : nb de racines de 1 ;
- D_K : discriminant ;
- Reg_K : régulateur ;
- h_K : nombre de classes.

L/K finie
Taelman, 2012 :

$$\zeta_L(1) = [\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]\cdot[H(C(\mathcal{O}_L))]$$

- ζ_L : zêta de Goss ;
- $H(C(\mathcal{O}_L))$: module de classes ;
- $[\mathcal{O}_L : \exp_C^{-1}(C(\mathcal{O}_L))]$: régulateur.

D., 2014 :
$\mathbb{F}_q \rightsquigarrow \mathbb{F}_q(t_1, \ldots, t_s)$
C (dim 1) $\rightsquigarrow C^{\otimes n}$ (dim n)
$\Rightarrow$ valeurs en n