Introduction aux fonctions L d'Artin

Charlotte Euvrard

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Rencontres Doctorales Henri Lebesgue
14 octobre 2014

Fonction zêta de Riemann

Définition

On définit la ***fonction zêta de Riemann*** *pour* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

Définition

On définit la ***fonction zêta de Riemann*** *pour* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

Propriété

Cette série converge et on peut écrire :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Equation fonctionnelle

Equation fonctionnelle

Définition

La fonction gamma d'Euler est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$*, par :*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Equation fonctionnelle

Définition

La fonction gamma d'Euler est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$*, par :*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Proposition

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$*, on pose* $\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$*. La fonction* Λ *se prolonge sur* $\mathbb{C}$ *en une fonction méromorphe avec seulement 2 pôles simples en* $s = 1$ *et* $s = 0$ *et vérifie :* $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$*.*

Conjecture de Riemann

Si s est un zéro non-trivial de ζ alors $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Généralisation aux corps de nombres : les fonctions L d'Artin

Quelques définitions

Définition

Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle ***représentation du groupe G*** *un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(V)$. On note (ρ, V) cette représentation.*

Quelques définitions

Définition

Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle ***représentation du groupe G*** *un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(V)$. On note (ρ, V) cette représentation.*

Définition

Le ***caractère*** *χ_ρ de la représentation (ρ, V) d'un groupe fini G est l'application de G dans $\mathbb{C}$ définie par :*

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) \text{ pour } g \in G.$$

Définition

Une représentation (ρ, V) *est irréductible si* $V \neq \{0\}$ *et* V *n'est pas somme directe de deux représentations.*

Quelques définitions

Définition

Une représentation (ρ, V) *est irréductible si* $V \neq \{0\}$ *et* V *n'est pas somme directe de deux représentations.*

Théorème

Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Définition

Soient $K/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, (ρ, V) une représentation de G de caractère χ et φ_p l'automorphisme de Frobénius d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de p.
*La **fonction L d'Artin** est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, par :*

$$L(s,\chi,K/\mathbb{Q}) = \prod_{p \text{ non-ramifiés}} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \rho(\varphi_p)p^{-s})} \prod_{p \text{ ramifiés}} L_p(s,\chi,K/\mathbb{Q}).$$

Somme et produit eulérien

Proposition

Soient d le degré de (ρ, V) et $\alpha_{i,\rho}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant d$ les valeurs propres de $\rho(\varphi_p)$. Alors :

$$L(s,\chi,K/\mathbb{Q}) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \alpha_{i,\rho}(p) p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{n \geqslant 1} a_\chi(n) n^{-s}$$

et $|\alpha_{i,\rho}(p)| = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$.

Propriétés

On a :

1. $$L(s, 1_G, K/\mathbb{Q}) = \zeta(s)$$
2. $$L(s, \chi_1 + \chi_2, K/\mathbb{Q}) = L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q}) L(s, \chi_2, K/\mathbb{Q})$$

Equation fonctionnelle

Equation fonctionnelle

Définition

1. *Le **conducteur d'Artin** est :* $q(\chi) = \prod_p p^{q_p(\chi)}$.
2. *Le **facteur gamma** est :* $\gamma_\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}\chi(1)} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{n^+} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{n^-}$.

Equation fonctionnelle

Définition

1. *Le **conducteur d'Artin** est :* $q(\chi) = \prod_p p^{q_p(\chi)}$.
2. *Le **facteur gamma** est :* $\gamma_\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}\chi(1)} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{n^+} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{n^-}$.

Equation fonctionnelle

Soit $\Lambda(s,\chi) = q(\chi)^{\frac{s}{2}} \gamma_\chi(s) L(s,\chi,K/\mathbb{Q})$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Alors Λ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles éventuels en $s=0$ et $s=1$ et vérifie :

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\overline{\chi}),$$

où $W(\chi)$ est une constante complexe de module 1.

Hypothèse de Riemann généralisée

Les zéros non-triviaux de $L(s,\chi,K/\mathbb{Q})$ sont sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Conjectures

Hypothèse de Riemann généralisée

Les zéros non-triviaux de $L(s, \chi, K/\mathbb{Q})$ sont sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Conjecture d'Artin

Toute fonction L d'Artin $L(s, \chi, K/\mathbb{Q})$ admet un prolongement en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf parfois en $s = 1$ où il y a un pôle d'ordre égal au nombre de fois où intervient le caractère trivial dans la décomposition de χ en caractères irréductibles.

Théorème sur l'égalité de fonctions L

Théorème

Soit χ_1 et χ_2 deux caractères irréductibles de degré d de G. On suppose vraies la conjecture d'Artin et l'hypothèse de Riemann généralisée pour les deux fonctions L d'Artin. Alors il existe un nombre premier $p \leqslant C\left(d \ln \mathfrak{q}\left(\chi_1\right) \mathfrak{q}\left(\chi_2\right)\right)^2$ vérifiant $p \nmid q(\chi_1)$ et $p \nmid q(\chi_2)$, tel que les paramètres locaux de $L(s, \chi_1)$ et $L(s, \chi_2)$ en p sont différents.

Merci