Inégalités fonctionnelles et PDMP contractifs.

Pierre Monmarché

Institut de Mathématiques de Toulouse

Rencontres Lebesgue 2014

le TCP

On définit des temps de sauts $T_k = T_{k-1} + E_k$ avec une suite $(E_k)_{k\geq 1}$ de variables indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(E_k \leq t\right) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ &= \lambda t + \underset{t\to 0}{o}(t). \end{aligned}$$

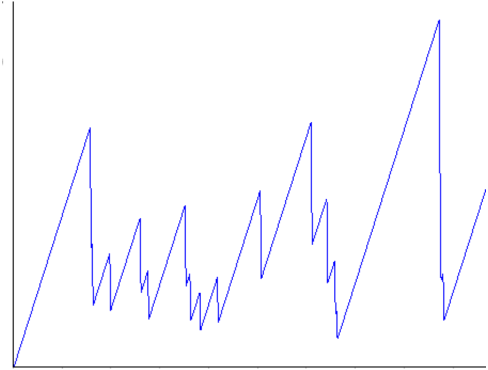
Le processus du TCP $(X_t)_{t\geq 0}$ est une fonction aléatoire, définie par

$$\frac{d}{dt} X_t = 1$$

entre les sauts et

$$X_{T_k} = \delta \lim_{s \to T_k} X_s \qquad (0 \leq \delta < 1).$$

le TCP



Semi-groupe de Markov

On appelle semi-groupe associé :

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_{X_0=x}\left(f(X_t)\right)$$

Par absence de mémoire, $P_{t+s} = P_t P_s$. D'autre part

$$\begin{aligned} P_s f(x) &= (1-\lambda s) f(x+s) + \lambda s f(\delta x) + \underset{s\to 0}{o}(s) \\ &= f(x) + s\left(f'(x) + \lambda\left(f(\delta x) - f(x)\right)\right) + \underset{s\to 0}{o}(s) \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\partial_t P_t f = L P_t f$$

avec

$$Lf(x) = f'(x) + \lambda\left(f(\delta x) - f(x)\right).$$

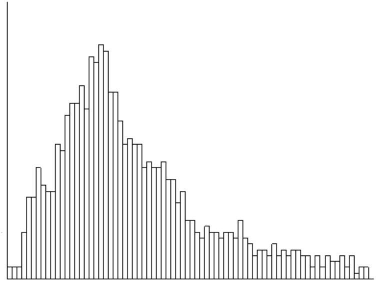
Interprétation analyste

Si ν est une loi de proba,

$$\nu P_t f = \mathbb{E}_{X_0 \sim \nu}\left(f(X_t)\right),$$

autrement dit νP_t est la loi au temps t, solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g'(t) & = & g(t)L \\ g(0) & = & \nu \end{array} \right.$$



Ergodicité

Mesure invariante : si l'on commence avec cette loi, on y reste.

$$\mu P_t = \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu L = 0.$$

Ergodicité : en temps long,

$$P_t f \to \mu f = \int f d\mu$$

ou encore

$$\nu P_t \to \mu.$$

On veut quantifier cette convergence, par exemple regarder si

$$\mathrm{Var}_\mu (P_t f) \quad = \quad \| P_t f - \mu f \|^2_{L^2(\mu)}$$

tend vers 0, et si oui à quelle vitesse.

Trou spectral

En notant $f_t = P_t f - \mu f$, $\partial_t f_t = L f_t$ et

$$\partial_t \left(\|f_t\|^2_{L^2(\mu)} \right) = 2 < Lf_t, f_t >_{L^2(\mu)}$$

Si L est auto-adjoint et si le spectre de L sur $1^\perp$ est inclus dans $[-\infty, -\rho]$,

$$\begin{aligned} < Lf_t, f_t >_{L^2(\mu)} &\leq -\rho \|f_t\|^2_{L^2(\mu)} \\ \Rightarrow \|f_t\|^2_{L^2(\mu)} &\leq e^{-2\rho t} \|f - \mu f\|^2_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

Ornstein-Uhlenbeck

La dynamique du processus d'Ornstein Uhlenbeck est définie par

$$dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dB_t,$$

ou autrement dit par le générateur

$$Lf(x) = -xf'(x) + f''(x).$$

La gaussienne de densité $e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la seule loi invariante, et

$$- < Lf_t, f_t >= \|f_t'\|^2 \geq \|f_t\|^2$$

(inégalité de Poincaré pour la gaussienne). En conséquence,

$$\|f_t\| \leq e^{-t}\|f - \mu f\|.$$

le TCP

On peut déterminer qu'il existe une unique mesure invariante μ ; à partir de $\mu L = 0$, on calcule

$$\begin{aligned} < Lf, f > &= \mu\left[f\left(f' + \lambda\left(f_\delta - f\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu\left[(f^2)'\right] + \lambda\mu\left[ff_\delta - f^2\right] \\ &= -\frac{\lambda}{2}\mu\left[f_\delta^2 - f^2\right] + \lambda\mu\left[ff_\delta - f^2\right] \\ &= -\frac{\lambda}{2}\mu\left(f_\delta - f\right)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pas d'inégalité de Poincaré !

La norme $\mathcal{H}^1$

$$\partial_t \left(\|f'\|^2 \right) \quad = \quad 2 < f', (Lf)' > .$$

Ici, $(f_\delta)' = \delta (f')_\delta$: lors d'un saut, l'espace se contracte.

$$\begin{aligned}
2 < f', (Lf)' > \quad &= \quad \mu((f')^2)' + 2\lambda\mu \left(\delta f_\delta' f' - (f')^2 \right) \\
&= \quad -\lambda\mu \left((f_\delta')^2 + (f')^2 - 2\delta f' f_\delta' \right) \\
&\leq \quad -\lambda(1-\delta^2)\|f'\|^2.
\end{aligned}$$

Le trou spectral est en fait $\lambda(1-\delta)$, et

$$\frac{\lambda}{2}(1-\delta^2) = \lambda(1-\delta)\frac{1+\delta}{2} \leq \lambda(1-\delta).$$

Cas général

La contraction peut venir du flot déterministe, par exemple pour

$$Lf(x) = -xf'(x) + \lambda \left(\int_0^\infty f(x+z)h(z)dz - f(x) \right).$$

Pour le générateur général

$$Lf(x) = b(x)f'(x) + \lambda(x)\left(Qf(x) - f(x)\right),$$

s'il existe $\beta, \eta, c > 0$

$$\begin{aligned} |(Qf)'(x)|^2 &\leq M(x)Q|f'|^2 \\ 2b'(x) + \frac{(\lambda'(x))^2}{\beta\lambda(x)} + \lambda(x)(M(x)-1) &\leq -\eta \\ \|f - \mu f\|_{L^2(\mu)} &\leq c\|f'\|_{L^2(\mu)} \end{aligned}$$

alors

$$\|f_t'\|^2 + \beta\|f_t\|^2 \leq e^{-\frac{\eta t}{\beta c+1}} \left(\|f'\|^2 + \beta\|f - \mu f\|^2 \right)$$

. . . et donc ?