

# Diffusion anormale en limite d'équations cinétiques sur un domaine borné.

Ludovic Cesbron  
sous la direction de A. Mellet and C. Mouhot

13-15 Octobre 2014  
Rencontres Doctorales Lebesgue

Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique  
Mesoscopique  
Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique

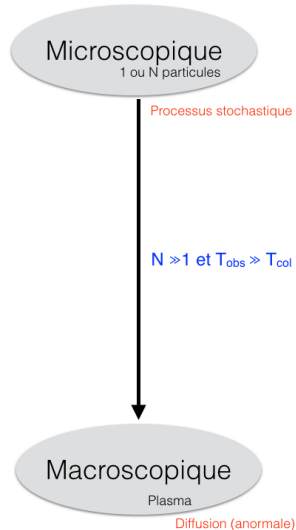
# Introduction to Kinetic theory

Microscopique  
1 ou N particules

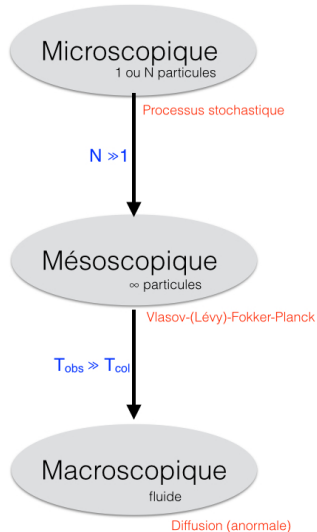
Processus stochastique

Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique  
Mesoscopique  
Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique

# Introduction to Kinetic theory



# Introduction to Kinetic theory



- 1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique
- 2 Mesoscopique
- 3 Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique
  - Changement d'échelle
  - Estimation a priori
  - Problème auxiliaire
  - Limite macroscopique

1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique

2 Mesoscopique

3 Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique

- Changement d'échelle
- Estimation a priori
- Problème auxiliaire
- Limite macroscopique

## Processus stochastique, trajectoire d'une particule

Pour décrire la trajectoire d'une particule, on considère les variables stochastiques  $(X_t, V_t)$  solutions de :

$$\begin{cases} \dot{X}_t = V_t, \\ \dot{V}_t = -\nu V_t + A(t) \end{cases}$$

où  $\nu$  est le coefficient de friction et  $A(t)$  est un bruit blanc de Lévy  $2s$ -stable,  $s \in (0, 1)$ .

## Densité de probabilité, équation cinétique

$f(t, x, v)$  = densité de probabilité. On utilise les trajectoires des particules pour écrire :

$$\frac{d}{dt}f(t, X_t, V_t) = 0$$

dont on déduit l'équation de Vlasov-Lévy-Fokker-Planck :

$$\begin{aligned}\partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= \mathcal{L}^s(f) \\ &= \nu \operatorname{div}_v(vf) - (-\Delta_v)^s f\end{aligned}$$



1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique

2 Mesoscopique

3 Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique

- Changement d'échelle
- Estimation a priori
- Problème auxiliaire
- Limite macroscopique

# Définition et propriétés du Laplacien fractionnaire

## Definition

*Le Laplacien fractionnaire peut-être définie de deux façons équivalentes :*

- *Par son action via la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  :*

$$\mathcal{F}\left[(-\Delta)^s u\right](\xi) = |\xi|^{2s} \mathcal{F}[u](\xi)$$

- *Par une formulation intégrale :*

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{N,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy$$

# Equilibre de l'opérateur de Lévy-Fokker-Planck

## Proposition

*Il existe une unique fonction  $F$  telle que :*

$$\mathcal{L}^s(F) = 0 \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(v) dv = 1$$

*et cet équilibre vérifie :*

$$F(v) \underset{v \gg 1}{\sim} \frac{1}{|v|^{N+2s}}$$

## Equation de Vlasov-Lévy-Fokker-Planck

On s'intéressera donc au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \operatorname{div}_v(vf) - (-\Delta_v)^s f \\ f(0, x, v) = f_{in}(x, v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \end{array}$$

# Equation de Vlasov-Lévy-Fokker-Planck sur $\Omega$ borné

On s'intéressera pour  $s \in (1/2, 1)$  le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t + v \cdot \nabla_x f = \operatorname{div}_v(vf) - (-\Delta_v)^s f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N \\ f(0, x, v) = f_{in}(x, v) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^N \\ + \text{conditions au bord} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Pour écrire les conditions au bord on introduit  $\Sigma_{\pm} = \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^N : \operatorname{sgn}(v \cdot n(x)) = \pm 1\}$  où  $n(x)$  est la normale sortant de  $\Omega$  en  $x \in \partial\Omega$ . On notera  $\gamma_{\pm}$  les restrictions de la opérateur trace à  $\Sigma_{\pm}$ .

## Conditions au bord

Dans la suite, on considerera la réflexion spéculaire :

$$\gamma_- f(t, x, v) = \gamma_+ f(t, x, \mathcal{R}_x(v))$$

avec  $\mathcal{R}_x(v) = v - 2(n(x) \cdot v)n(x)$ . En théorie cinétique, on considère aussi deux autres types (et demi) de conditions au bord :

- Absorption :  $\gamma_- f(t, x, v) = 0$ .
- Diffusion :

$$\gamma_- f(t, x, v) = F(v) \int_{n(x) \cdot w > 0} \gamma_+ f(t, x, w) |n(x) \cdot w| dw.$$

- Les conditions au bord de Maxwell qui sont une combinaison linéaire convexe de réflexion spéculaire et de diffusion.

- 1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique
- 2 Mesoscopique
- 3 Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique
  - Changement d'échelle
  - Estimation a priori
  - Problème auxiliaire
  - Limite macroscopique

## Nombre de Knudsen, changement d'échelle

On définit le nombre de Knudsen  $\varepsilon$  comme le ratio :

$$\varepsilon = \frac{\text{temps entre deux collisions}}{\text{temps d'observation}}$$

On va introduire le nombre de Knudsen dans l'équation pour modéliser le nombre de collision par unité de temps qui tends vers l'infini et on va changer d'échelle en temps selon :

$$t' = \varepsilon^{2s-1} t$$



## Equation de VLFP avec Réflexion Spéculaire

L'équation de Vlasov-Lévy-Fokker-Planck *re-scaled* avec réflexion spéculaire sur le bord s'écrit donc :

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s-1} \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left( \operatorname{div}_v (v f^\varepsilon) - (-\Delta_v)^s f^\varepsilon \right), \\ f^\varepsilon(0, x, v) = f_{in}(x, v), \\ \gamma_- f^\varepsilon(t, x, v) = \gamma_+ f^\varepsilon(t, x, \mathcal{R}_x(v)). \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement de  $f^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

- 1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique
- 2 Mesoscopique
- 3 **Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique**
  - Changement d'échelle
  - **Estimation a priori**
  - Problème auxiliaire
  - Limite macroscopique

## Estimation a priori

On montre tout d'abord que  $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 en multipliant l'équation par  $f^\varepsilon/F(v)$  et en intégrant par rapport à  $x$  et  $v$ . On montre en fait que :

$$f^\varepsilon(t, x, v) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(t, x) F(v) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N, F^{-1}(v) dt dx dv)$$

- 1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique
- 2 Mesoscopique
- 3 **Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique**
  - Changement d'échelle
  - Estimation a priori
  - **Problème auxiliaire**
  - Limite macroscopique

## Courbes caractéristiques

On remarque que lorsque l'on considère la transformée de Fourier de VLFP en  $x$  et  $v$ , respectivement  $k$  et  $\xi$  on trouve une équation hyperbolique :

$$\varepsilon^{2s-1} \partial_t \hat{f}^\varepsilon + (k - \varepsilon^{-1} \xi) \nabla_\xi \hat{f}^\varepsilon = |\xi|^{2s} \hat{f}^\varepsilon$$

dont les courbes caractéristiques apparaissent dans le terme  $(k - \varepsilon^{-1} \xi) \nabla_\xi$ .

On va retrouver ces courbes caractéristiques dans la formulation variationnelle du problème sous forme de l'opérateur

$$v \cdot \nabla_x - \varepsilon^{-1} v \cdot \nabla_v$$

## Formulation faible pour réflexion spéculaire

On considère  $\phi^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  à support compact dans  $\Omega$ , on en déduit la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N} f^\varepsilon \left( \varepsilon^{2s-1} \partial_t \phi^\varepsilon + \varepsilon^{-1} (-\Delta_v)^s \phi^\varepsilon \right) dt dx dv \\ & + \iiint_{\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N} f^\varepsilon \left( v \cdot \nabla_x \phi^\varepsilon - \varepsilon^{-1} v \cdot \nabla_v \phi^\varepsilon \right) dt dx dv \\ & - \iint_{\mathbb{R}^+ \times \Sigma_+} \gamma_+ f^\varepsilon \left( \gamma_+ \phi^\varepsilon(t, x, v) - \gamma_- \phi^\varepsilon(t, x, \mathcal{R}_x(v)) \right) |n(x) \cdot v| dt dv \\ & - \varepsilon^{2s-1} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} f_{in}(x, v) \phi^\varepsilon(0, x, v) dx dv = 0. \end{aligned}$$

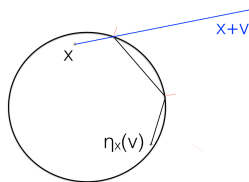
## Problème Auxiliaire

Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$  à support compact dans  $\Omega$ , on introduit le problème auxiliaire :

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi^\varepsilon - \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N, \\ \phi^\varepsilon(t, \mathbf{x}, 0) = \psi(t, \mathbf{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \gamma_+ \phi^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \gamma_- \phi^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Sigma_+. \end{cases}$$

## Choix de la fonction test

Si on considère  $\Omega$  un domaine régulier fortement convexe ou un domaine à géométrie particulière, alors pour tout  $x \in \Omega$ , il existe  $\eta_x : \mathbb{R}^N \mapsto \Omega$  telle que  $\eta_x(v)$  est le point d'arrêt de la trajectoire issue de  $x$  avec une vitesse initiale  $v$  :



Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$  à support compact dans  $\Omega$  on considère :

$$\phi^\varepsilon(t, x, v) = \psi(t, \eta_x(\varepsilon v)).$$

C'est une solution du problème auxiliaire précédent.



## Formulation faible avec $\phi^\varepsilon$

Avec cette fonction test, on obtient la formulation variationnelle suivante de Vlasov-Lévy-Fokker-Planck :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N} f^\varepsilon \left( \partial_t \psi + (-\Delta)^s [\psi(t, \eta_x(\cdot))] (\varepsilon v) \right) dt dx dv \\ & - \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} f_{in}(x, v) \psi(0, \eta_x(\varepsilon v)) dx dv = 0. \end{aligned}$$

- 1 Microscopique  $\rightarrow$  Mésoscopique
- 2 Mesoscopique
- 3 Mésoscopique  $\rightarrow$  Macroscopique
  - Changement d'échelle
  - Estimation a priori
  - Problème auxiliaire
  - Limite macroscopique

## Opérateur limite de diffusion quand $\Omega$ est une demi-espace

Si on prend  $\Omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$  alors  $\eta_x$  devient explicite :  $\eta_x(v) = (x' + v', |x_N + v_N|)$ . On montre alors que :

$$\begin{aligned} & \iint\limits_{\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^N} f^\varepsilon(-\Delta)^s \psi(t, x + \eta_x(\varepsilon v)) \, dt dx dv \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \iint\limits_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \psi(t, x) \left( \int\limits_{\Omega} (\rho(t, x) - \rho(t, y)) K(x, y) \, dy \right) \, dt dx \end{aligned}$$

où

$$K(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{N+2s}} + \frac{1}{|(x' - y')^2 + (x_N + y_N)^2|^{\frac{N+2s}{2}}}$$

## Equation limite sur la densité de particule

On définit :

$$(-\Delta_{SR})^s u(x) = \int_{\Omega} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy.$$

En conclusion,  $f^\varepsilon$  tend faiblement vers  $\rho(t, x)F(v)$  où  $F$  est l'équilibre de l'opérateur de Lévy-Fokker-Planck et  $\rho$  est solution faible de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + (-\Delta_{SR})^s \rho = 0 \\ \rho(0, x) = \rho_{in}(x) \end{cases}$$

où  $\rho_{in}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_{in}(x, v) dv$ .

Merci pour votre attention !