Autour de l'infinie divisibilité des lois de probabilités

Pierre Bosch

Université Lille 1

Rencontres doctorales Lebesgue 2014, Rennes

Introduction

Définition

Une mesure μ est n-divisible s'il existe une mesure μ_n telle que

$$\mu = \mu_n^{*n} = \underbrace{\mu_n * \cdots * \mu_n}_{n \text{ termes}}.$$

La mesure μ est infiniment divisible (ID) si elle est n-divisible pour tout $n \geq 1$.

Rappel : $\mu * \nu(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_A(x+y)\ \mu(dx)\nu(dy)$.

Par exemple, pour $t > 0$ soit

$$\mu_t(dx) = \frac{x^{t-1}\ \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)}{\Gamma(t)}\, dx.$$

Il est facile de vérifier que $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$. La mesure de Lebesgue est donc infiniment divisible sur $(0,\infty)$.

n-divisibilité

Une variable aléatoire X est n-divisible s'il existe $(X_1 \dots X_n)$ i.i.d. tel que

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

Évidemment, poser $X_i = X/n$ ne convient pas.

Divisibilité infinie

La variable aléatoire X est infiniment divisible (ID) si elle est n-divisible pour tout n.

Exemples faciles

Exemples de lois ID :

- $X = c \sim \delta_c$;
- loi gaussienne : $\mu_t(dx) = (2\pi t)^{-1/2}\ e^{-x^2/2t}\ dx$;
- loi de Poisson : $\mu_t(\{k\}) = e^{-t}\ t^k/k!$;
- loi exponentielle, gamma : $\mu_t(dx) = \Gamma(t)^{-1}\ x^{t-1}e^{-x}\ dx$;
- loi géométrique, binomiale négative : $\mu_{t,p}(\{k\}) = \binom{k+t-1}{k}\ p^t(1-p)^k$;
- loi de Cauchy : $\mu_t(dx) = t^2/\pi(t^2+x^2)\ dx$;
- X^2 où $X \sim \mathcal{N}(0,t)$.

Exemples de lois non ID :

- loi binomiale $\mu_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k}\ p^k(1-p)^{n-k}$;
- loi uniforme $\mu(dx) = (b-a)^{-1}\ \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\ dx$;
- toute loi (non triviale) à support compact.

Exemples faciles

Proposition

Une mesure de probabilité à support compact ID *est une mesure de Dirac.*

Exemples moins faciles

ID

- loi de Pareto : $x \mapsto c_a/(1+x)^{a+1}, \; x > 0$;
- loi de Gumbel : $X = -\log(L)$ où $L \sim \text{Exp}(1)$, i.e. $\mu_X(dx) = e^{-x}e^{-e^{-x}}dx$;
- loi demi-Cauchy : $\mu(dx) = 2/\pi(1+x^2), \; x > 0$;
- X^2 où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$;
- $\sqrt{L_1 L_2}$ où $L_1 \perp L_2 \sim \text{Exp}(1)$.

Non ID

- $\sqrt{L}$ où $L \sim \text{Exp}(1)$;
- $|X|$ où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Fonction caractéristique et transformée de Laplace

Exposant de Lévy-Khintchine, le cas général

X est ID ssi il existe un triplet (a, σ, ν) tel que

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) = \exp\left(iau - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iux} - 1 - iu\tau(x))\nu(dx)\right)$$

où $\tau(x) = x/(1+x^2)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}(1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$.

Exposant de Lévy-Khintchine, le cas spectralement positif

X est ID ssi il existe un couple (a, ν) tel que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) = \exp\left(-a\lambda - \int_0^{\infty}(1 - e^{-\lambda x})\nu(dx)\right)$$

où $\int_0^{\infty}(1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$.

Infini divisibilité de la loi de Gumbel

Soient $(L_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables exponentiels et G une variable de Gumbel. Il est facile de vérifier que

$$L_1 + \frac{L_2}{2} + \cdots + \frac{L_k}{k} - \log(k) \overset{\mathrm{d}}{=} \max(L_1 \ldots L_k) - \log(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} G$$

et

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda L_k/k}\right) = \frac{1}{1+\lambda/k} = e^{-\log(1+\lambda/k)} = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})\frac{e^{-kx}}{x}dx\right).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda G}\right) = \exp\left(-\gamma\lambda - \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x}-\lambda x)\frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}dx\right).$$

Infini divisibilité de la loi de Gumbel

Soient $(L_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables exponentiels et G une variable de Gumbel. Il est facile de vérifier que

$$L_1 + \frac{L_2}{2} + \cdots + \frac{L_k}{k} - \log(k) \overset{\mathrm{d}}{=} \max(L_1 \ldots L_k) - \log(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} G$$

et

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda L_k/k}\right) = \frac{1}{1+\lambda/k} = e^{-\log(1+\lambda/k)} = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})\frac{e^{-kx}}{x}dx\right).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda G}\right) = \exp\left(-\gamma\lambda - \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x} - \lambda x)\frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}dx\right).$$

On a en fait montré l'égalité suivante :

$$\Gamma(1+\lambda) = \exp\left(-\gamma\lambda - \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x} - \lambda x)\frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}dx\right).$$

$$\beta_{a,b} \sim \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ \mathbf{1}_{(0,1)}(x)\ dx.$$

Les puissances positives de $\beta_{a,b}$ ne sont pas infiniment divisibles.

Théorème

$\forall\ a, b, s > 0,\ \beta_{a,b}^{-s}$ *est infiniment divisible.*

$$\beta_{a,b}^{-1} \sim \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\, x^{-(a+b+1)}(x-1)^{b-1}\, \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)\, dx.$$

Proposition

(1) $\beta_{a,b}^{-1} \overset{\mathrm{d}}{=} \int_0^\infty e^{-(t-X_t^{a,b})}dt$ *où* $(X_t^{a,b})_{t\geq 0}$ *est un processus de Poisson composé ayant pour mesure de Lévy* $\nu(dx) = b(a+b)e^{-(a+b)x}dx$.

(2) $\beta_{a,b}^{-1} - 1 \overset{\mathrm{d}}{=} \int_0^\infty e^{-(\tilde{Y}_t^{a,b}-t)}dt$ *où* $(Y_t^{a,b})_{t\geq 0}$ *est un processus de Poisson composé ayant pour mesure de Lévy* $\tilde{\nu}(dy) = (a+b-1)(b-1)e^{-(b-1)y}dy$ $(b > 1)$.

(1) permet de montrer que la loi de $\beta_{a,b}^{-1}$ est auto-décomposable.

Définition

Une mesure de probabilité μ est auto-décomposable si $\forall c \in (0,1)$ il existe une probabilité μ_c telle que $\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\mu}(c\lambda)\hat{\mu}_c(\lambda)$.

Ceci correspond à la décomposition en loi : $Z \overset{\mathrm{d}}{=} cZ + Z_c$.

Proposition

$$\mu \textit{ auto-décomposable} \Longrightarrow \mu \text{ ID.}$$

L'auto-décomposabilité de $\int_0^\infty e^{-(t-X_t^{a,b})}dt$ est une conséquence du fait que :

- $\mathbb{E}\left(X_1^{a,b}\right) = b/(a+b) < 1$;
- $(X_t^{a,b})_{t\geq 0}$ est spectralement positif ;
- Le temps d'arrêt $T_c = \inf\{t > 0/\ t - X_t^{a,b} = c\}$ est fini presque sûrement.

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-(t-X_t^{a,b})}dt}_{Z} = \underbrace{\int_0^{T_c} e^{-(t-X_t^{a,b})}dt}_{Z_c} + \underbrace{\int_{T_c}^\infty e^{-(t-X_t^{a,b})}dt}_{e^{-c}\int_0^\infty e^{-(t-\tilde{X}_t^{a,b})}dt \overset{\mathrm{d}}{=} e^{-c}Z}.$$

Divisibilité infinie de $\beta_{a,b}^{-s}$: éléments de démonstration

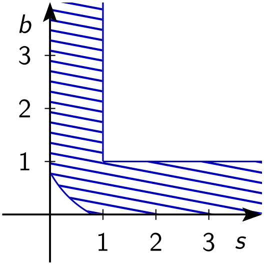
Proposition

La variable aléatoire $\beta_{a,b}^{-s}$ *a la même loi que*

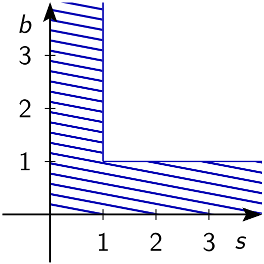
$$\int_0^{\infty} e^{-X_t} dt$$

pour un certain processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ *spectralement négatif qui tend vers* $+\infty$ *ssi*

$$b \wedge s \leq 1 \leq 2a + b + bs + s.$$



Le cas $a < 1/2$.



Le cas $a \geq 1/2$.

Divisibilité infinie de $\beta_{a,b}^{-s}$: éléments de démonstration

On pose $\mathcal{E}_- = \left\{ \mathcal{L}\left(\int_0^\infty e^{-X_t} dt \right), \quad \begin{array}{l} X \text{ processus de Lévy spectralement} \\ \text{négatif tendant vers } +\infty \end{array} \right\}$.

Théorème (Bertoin & Yor)

Soit Z une variable positive. La loi de Z appartient à $\mathcal{E}_-$ ssi il existe $t > 0$ tel que $\mathbb{E}\left(e^{t/Z}\right) < \infty$ et si la fonction

$$\Psi : u \mapsto \frac{u\mathbb{E}\left(X^{-(u+1)}\right)}{\mathbb{E}\left(X^{-u}\right)}$$

est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif tendant vers $+\infty$.

$$\frac{u\mathbb{E}\left(\beta_{a,b}^{s(u+1)}\right)}{\mathbb{E}\left(\beta_{a,b}^{su}\right)} = \frac{u\Gamma(a+s+su)\Gamma(a+b+su)}{\Gamma(a+b+s+su)\Gamma(a+su)}$$

donc $\beta_{a,b}^{-s} \in \mathcal{E}_-$ ssi $\Psi(u) = u \times \dfrac{\Gamma(a+s+u)}{\Gamma(a+b+s+u)} \times \dfrac{\Gamma(a+b+u)}{\Gamma(a+u)}$ est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif avec moyenne positive.

Divisibilité infinie de $\beta_{a,b}^{-s}$: éléments de démonstration

$$\Psi(u) = u \times \frac{\Gamma(a+s+u)}{\Gamma(a+b+s+u)} \times \frac{\Gamma(a+b+u)}{\Gamma(a+u)}.$$

On exprime cette dernière fonction à l'aide de fonction hypergéométrique

$$\Psi(u) = u \times {}_2F_1(b, -s; a+b+u; 1) = u \times {}_2F_1(s, -b; a+s+u; 1)$$

où ${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda)_n (\mu)_n}{(\nu)_n \, n!} z^n$ et $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$. Alors

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= u - bsu \sum_{n \geq 1} \frac{(1+b)_{n-1}(1-s)_{n-1}}{(a+b+u)_n \, n!} \\ &= u - u \int_0^\infty e^{-ux} \underbrace{bse^{-(a+b)x}\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{(1+b)_{n-1}(1-s)_{n-1}}{n!(n-1)!} (1-e^{-x})^{n-1} \Big)}_{bse^{-(a+b)x}{}_2F_1(1+b,1-s;2;1-e^{-x})} dx.\end{aligned}$$

Divisibilité infinie de $\beta_{a,b}^{-s}$: éléments de démonstration

On pose $\rho_{a,b,s}(x) = bse^{-(a+b)x}{}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1-e^{-x})$, notons que $\rho_{a,b,s} = \rho_{a,s,b}$. On intègre par parties

$$\Psi(u) = u - u\int_0^\infty e^{-ux}\rho_{a,b,s}(x)dx = u + \int_{-\infty}^0 (e^{ux}-1)(-\rho'_{a,b,s}(x))dx.$$

Quand est-ce que $\rho'_{a,b,s}$ est négatif ?

$$\rho'_{a,b,s}(0) = -\frac{bs}{2}(2a+b+bs+s-1).$$

La condition $2a+b+bs+s \geq 1$ est donc nécessaire.
Ensuite un résultat F. Klein nous dit que

$$x \mapsto {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1-e^{-x})$$

s'annule exactement $\lceil b \wedge s \rceil - 1$ fois sur $(0,\infty)$, ce qui montre la nécessité de la condition $b \wedge s \leq 1$.

Divisibilité infinie de $\beta_{a,b}^{-s}$: éléments de démonstration

On suppose $b = b \wedge s \leq 1$.

- Si $b = 1$, $\rho_{a,1,s}(x) = se^{-(a+s)x}$ est une fonction décroissante.
- Si $b, s < 1$, un résultat de log-concavité de la fonction $\rho_{a,b,s}$ nous assure que la fonction ρ est décroissante puisque $\rho'_{a,b,s}(0) \leq 0$.
- Si $b < 1 \leq s$ il suffit de prouver que la fonction

$$y \mapsto {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; y)$$

décroissante sur $(0, 1)$. Sa dérivée est égale à

$$\frac{(1+b)(1-s)}{2} \, {}_2F_1(2+b, 2-s; 3; y)$$

et on utilise encore une fois par le résultat de Klein sur le nombre de zéros d'une fonction hypergéométrique.

Merci pour votre attention !