Énoncer des assertions, c'est bien. Les démontrer c'est mieux. Les démontrer proprement, c'est encore mieux ! Voici une sélection de quelques-unes des méthodes les plus usitées dans tous les domaines des mathématiques...

a) Comment démontrer que $P \Rightarrow Q$?

Cette méthode de démonstration est absolument primordiale. On voit trop souvent des rédactions du genre "$P \Rightarrow R \Rightarrow S \Rightarrow Q \Rightarrow$ ok"... La première règle à respecter lorsque l'on veut démontrer une implication est de **ne pas utiliser le symbole "$\Rightarrow$"** ! En effet, comme l'on vient de le voir, **celui-ci est un connecteur logique qui n'a absolument rien à voir avec le mot "donc"**. Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, le mieux est de suivre la méthode suivante :

1. Supposer que P est vraie.
2. Démontrer qu'alors Q est vraie.

Cette approche est en règle générale la seule valable...

Exemple "idiot" :
On veut démontrer "$(2+3=6) \Rightarrow$ (16 est un carré parfait)".

1. Supposons que $2+3=6$.
2. $16 = 4 \times 4$ donc 16 est un carré parfait. D'où le résultat.

Cet exemple n'a aucun intérêt mathématique étant donné que l'on a pas fait usage de l'hypothèse (qui par ailleurs à la facheuse propriété d'être fausse...) ! Lorsque l'on arrive à démontrer que $P \Rightarrow Q$ sans avoir utilisé la véracité de P, c'est que l'on a fort vraisemblablement commis une erreur...

b) Comment démontrer que $P \Leftrightarrow Q$?

Pour démontrer une équivalence, il faut et il suffit de montrer deux implications. Ainsi, on procède en 2 temps :

1. On montre que $P \Rightarrow Q$.
2. On montre que $Q \Rightarrow P$.

Ce type de rédaction à l'immense avantage d'être bien moins "casse-gueule" que les suites (plus ou moins logiques, hélas...) de symboles " $\Leftrightarrow$ "...

c) Comment démontrer que $P \vee Q$?

Sur le papier, ce genre de choses est excessivement simple. En pratique, il donne lieu à des raisonnements souvent assez brouillons. La meilleure méthode pour démontrer ce genre d'assertion est de procéder de la façon suivante : comme on a vu que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$, démontrer une assertion du type "soit P, soit Q" peut se faire en suivant ce plan :

1. Supposer que P est fausse.
2. Montrer qu'alors Q est vraie.

d) Comment démontrer que $P \wedge Q$?

Lorsque l'on doit démontrer "P et Q", le mieux reste encore... de démontrer P **et** de démontrer Q ! Attention cependant à bien séparer les deux démonstrations, il ne s'agit pas de montrer $P \Rightarrow Q$...

e) Contraposée

Comme $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, il est possible de démontrer $P \Rightarrow Q$ en démontrant $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

f) Démonstration par l'absurde

On a vu que $(\overline{P} \Rightarrow (Q \wedge \overline{Q})) \Rightarrow P$. Ainsi, si on suppose "Non P" et que l'on aboutit à une contradiction, alors P est vraie. Il est recommandé de ne pas abuser de cette méthode.

g) Comment démontrer que $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$?

La procédure est la suivante :

1. On se donne $x \in \mathbb{E}$.
2. On montre $P(x)$.

L'erreur (gravissime !) serait ici de se donner un x "particulier" et de montrer $P(x)$...

h) Comment démontrer que $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$?

Certainement l'une des démonstrations les plus difficiles a priori... Les deux méthodes ci-après comptent parmi les seules efficaces (et correctes !) :

1. Exhiber un élément x vérifiant P.
2. Raisonner par l'absurde en supposant qu'aucun élément de $\mathbb{E}$ ne vérifie P.

i) Comment démontrer que $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$?

1. On commence par montrer que $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ (souvent l'étape la plus difficile).
2. On suppose qu'il existe x et $\hat{x}$ dans $\mathbb{E}$ vérifiant P.
3. On montre que $x = \hat{x}$.