Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ est un trinôme du second degré (avec donc $a \neq 0$), et que son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$, il admet deux racine(s) (éventuellement égale(s)) donnée(s) par la formule

$$r_\pm = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

avec $\delta^2 = \Delta$. On en déduit que :

$$\begin{cases} r_+ + r_- = -\dfrac{b}{a} \\ r_+ r_- = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(X^2 - (r_+ + r_-)X + r_+ r_-) \\ &= a(X - r_+)(X - r_-) . \end{aligned}$$

Ces relations entre coefficients et racines sont appelées, dans un élan d'originalité à faire pâlir un scénariste de chez Marvel, des **relations coefficients–racines**.

En dégré 3, on voit apparaître des choses similaires ; en effet, si $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ est un polynôme scindé de degré 3, on obtient, en développant :

$$\begin{aligned} P &= (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \\ &= X^3 + aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2 + x_3) \\ b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ c = -x_1 x_2 x_3 \end{cases} .$$

De façon plus générale, si $n, k \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $k \leq n$, on appelle **k–ième fonction symétrique élémentaire à n variables** l'application

$$\begin{aligned} \sigma_k : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\to \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} X_{i_1} \ldots X_{i_k} . \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j$$

et

$$\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

Ces fonctions ont un lien fort avec les relations que nous venons de voir pour les degrés 2 et 3. Celles–ci se généralisent via le théorème suivant.

Théorème (Relations coefficients–racines)**.**
Soit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ *un polynôme scindé de degré* n *dont les racines (comptées avec multiplicité) sont notées* $r_1, \ldots, r_n$*. Alors :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_k(r_1, \ldots, r_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} .$$