Suites numériques (2)

– I –

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $|u_n^2| \leq |u_n|$.
2. Étudier les limites des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{2n^3-3n+2}$;
   (b) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
   (c) $w_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$;
   (d) $x_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$ telles que $u_n v_v \xrightarrow[n\to\infty]{} u_n v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

– II –

1. Déterminer le terme général des suites récurrentes suivantes et calculer leur limite éventuelle.
   (a) $u_0 = 3$, $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$;
   (b) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + 1$.
   (a) Déterminer le réel α tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique. Préciser alors la raison et le premier terme de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n, puis la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer les suites bornées telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.