Suites numériques

– I –

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = 2 + (-1)^n$ est divergente.
2. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$ (b) $v_n = \dfrac{n^2 + 7n + 12}{n^3 + n^4}$ (c) $w_n = \lfloor e^n \rfloor$ (d) $x_n = \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. Soit u une suite convergente. Démontrer que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
4. Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?
5. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}$.

– II –

1. Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\left\{1 - \dfrac{1}{x} \;\middle|\; x > 0\right\}$.
2. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $+\infty$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.
3. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (on dit que a est *adhérent* à $I \setminus \{a\}$).

– III –

1. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{i}{4} u_n$.
2. *Moyenne de Césaro.* Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \, .$$
3. *Moyenne arithmético–géométrique.* Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \, .$$
   Démontrer que u et v sont adjacentes.