Nombres complexes

– I –

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10}$.
2. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que
$$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^* \; .$$
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z+\bar{z}=|z|$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1|=|z|+1$.

– II –

1. Soient $a, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta) \; .$$
2. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer j^n et $(j^2)^n$.
   (b) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité $(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.
   (c) En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} \; .$$

– III –

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\sqrt{3}+i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation z^2+z+1.
3. Soit $n \geq 1$ et soit ω une racine n–ième de l'unité. Calculer la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \omega^k \; .$$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2+z+1=0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-z^2-1=0$.