

TRIGONOMÉTRIE(S)

– I –

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :

$$(a) \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

$$(b) \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

$$(c) \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

$$(d) \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que $\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$.

3. Exprimer, pour $x \in [-1, 1]$, les quantités $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$.

4. (a) Démontrer que l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

est injective.

(b) Démontrer que $f(\mathbb{R}) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Montrer que l'application

$$g :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \tan(\theta/2)$$

est surjective.

(d) Déterminer une expression simple de la composée $f \circ g$.

– II –

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que :

$$(a) \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y);$$

$$(b) \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)+1}{2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{2}}.$$

3. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; on pose $t = \tan(\theta/2)$ et $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(a) Démontrer que $x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

(b) En déduire une expression de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.

(c) Exprimer θ en fonction de x .

4. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.

(b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c.$$

Déterminer la valeur de c .