Nombres réels

– I –

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\sqrt{|x-y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; montrer que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
4. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

– II –

1. Soient A, B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $B \subset A$. Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :
$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A) \ .$$
2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad x < y \ .$$
Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?
3. Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose
$$A + B = \{x + y \,|\, (x, y) \in A \times B\} \ .$$
Démontrer que $A+B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$; étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, x, y \in [a, b] \right\} \ .$$
5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose
$$B = \{|x - y| \,|\, x, y \in A\} \ .$$
   (a) Démontrer que B est non vide et bornée.
   (b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
   (c) Démontrer que B admet une borne supérieure vérifiant $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

– III –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; étudier la quantité $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
2. On considère la fonction suivante :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x - \lfloor x \rfloor| \ . \end{aligned}$$
   (a) Tracer l'allure du graphe de f sur $[-3, 3]$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$.
   (d) Démontrer que $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.