Applications, relations

– I –

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & |n| \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction suivante ; est–elle injective, surjective, bijective ?
$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} .$$
3. Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.
4. Soient E, F deux ensembles et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On fixe une application $f : E \to F$.
   (a) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
   (b) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$.
   (c) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
   (d) Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
5. Soient f, g deux applications telles que $f \circ g$ soit bijective. Que dire de f et g ? Réciproquement ?
6. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) \supset A$.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
7. Démontrer la proposition sur les indicatrices du cours.

– II –

1. Montrer que la relation "divise" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \mathscr{R} y) \Leftrightarrow (\cos(x) = \cos(y)) .$$
   (a) Justifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Quelle est la classe de 0 ? De $\frac{\pi}{2}$? De π ?