Logique

1. Soient A, B et C trois points du plan.
   (a) Écrire une assertion caractérisant le fait que le triangle ABC soit équilatéral.
   (b) En déduire une assertion caractérisant le fait que ce triangle ne soit **pas** équilatéral.
   (c) Même exercice en remplaçant "équilatéral" par "isocèle".
2. Soient A, B et C trois assertions. L'assertion suivante est-elle vraie ?
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)\ .$$
3. Quelle est la différence entre les deux phrases quantifiées suivantes ?
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\ y^3 = x \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\ y^3 = x\ .$$
4. Nier la phrase quantifiée suivante :
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in \mathbb{R},\, (|x| \leq \delta) \Rightarrow (|x^2| \leq \varepsilon)\ .$$
5. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Expliquer la signification et nier les phrases quantifiées suivantes :
   (a) $\exists M \in \mathbb{R},\, \forall x \in A,\, x \leq M$; (c) $\exists x \in A,\, \forall M \in \mathbb{R},\, x \leq M$;
   (b) $\forall x \in A,\, \exists M \in \mathbb{R},\, x \leq M$; (d) $\forall M \in \mathbb{R},\, \exists x \in A,\, x \leq M$.

Ensembles

1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à quatre éléments. Compléter chacune des assertions suivantes avec le symbole "$\in$" ou "$\subset$" de façon à ce qu'elles soient vraies.
   (a) $d \ldots E$; (c) $E \ldots E$; (e) $E \ldots \mathscr{P}(E)$; (g) $\{a, d\} \ldots E$;
   (b) $\{c\} \ldots E$; (d) $\emptyset \ldots E$; (f) $\emptyset \ldots \mathscr{P}(E)$; (h) $\{a, d\} \ldots \mathscr{P}(E)$.
2. Déterminer tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A \cap B = \{2, 3, 5\}$.
3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}\ .$$
4. Déterminer
$$\bigcap_{n \geq 1} \left[2 + \frac{1}{n}\, ,\, 5 - \frac{7}{n} \right]\ .$$
5. Soit E un ensemble. Déterminer
$$X = \{A \in \mathscr{P}(E) \,|\, \forall B \in \mathscr{P}(E), A \cup B = B\}\ .$$