

RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS D'ANALYSE

– I –

Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux) et énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, ...).

1. $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$;
2. $g : x \mapsto x^7$;
3. $h : x \mapsto e^{2x^3+7}$;
4. $i : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \ln(x)$;
5. $j : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$;
6. $k : x \mapsto x^{1/3}$;
7. $\ell : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

– II –

1. Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :
 - (a) pour $a > 0$, $x \mapsto x^a$;
 - (b) pour $x \in]0, 1[$, $a \mapsto x^a$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
3. Établir, pour tout $x \geq 0$, l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

4. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x.$$
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

5. Montrer que pour tous $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$