Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 1 page.**

– I –

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$; démontrer que $\arg(z) = \arg(z') \Leftrightarrow \overline{z}z' \in \mathbb{R}_+$.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.
   (a) Démontrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. **Ceci est une question de cours.**
   (b) Démontrer que $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \overline{z}z' \in \mathbb{R}_+$. **Ceci est *presque* une question de cours.**
3. Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \,.$$
   (b) Démontrer que l'inégalité ci–dessus est une égalité si et seulement si
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \overline{z_i}z_j \in \mathbb{R}_+ \,.$$

– II –

On fixe dans cette partie $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ (avec $n \geq 2$). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \,.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \,.$$
2. (a) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$
   (b) Démontrer que l'inégalité ci–dessus est une égalité si et seulement si
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \overline{a_k}(z_k - z) \in \mathbb{R}_+ \,.$$
3. Dans cette question, on pose, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{2ik\pi/n}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$n \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$
   (b) En choisissant une valeur judicieuse de z, en déduire que :
$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n \,.$$
   (c) Conclure que :
$$\frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \frac{2}{n} \,.$$