*Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur.* **Ce sujet comporte 1 page et est composé de deux exercices indépendants ainsi que d'une question de cours.**

# Question de cours (et assimilé)

1. Démontrer que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.
2. On pose $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \in [0, 2\pi[\}$. Démontrer que la restriction de exp à $\Lambda$ est une bijection.
3. Résoudre l'équation $e^z = 3$ de la variable $z \in \mathbb{C}$.

# Exercice 1

On fixe dans cet exercice $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

1. (a) Posons $u = y - x$ et $v = z - x$. Justifier que $1 + e^{iu} + e^{iv} = 0$.
   (b) Justifier que $\sin(y) = -\sin(z)$. En déduire que $e^{iv} = e^{-iu}$.
   (c) Démontrer que $e^{iu}$ et $e^{iv}$ sont solutions de l'équation $1 + z + z^2 = 0$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 = 0$. On exprimera les solutions en fonction de $j = e^{2i\pi/3}$.
   (b) Démontrer que $j^2 = \overline{j}$. Que vaut $j^3$ ?
   (c) En déduire que $1 + e^{2iu} + e^{2iv} = 0$.
3. Démontrer pour conclure que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$

# Exercice 2

On fixe dans cet exercice $x \in ]0, 4[$ et on pose :

$$\omega = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\,.$$

1. Justifier que $\omega$ est bien défini.
2. Démontrer que :
$$\cos(\omega) = 1 - \frac{x}{2}\,.$$
3. (a) Montrer que $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ sont positifs.
   (b) Démontrer que :
$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}\,.$$
4. Déduire de ce qui précède que :
$$\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\right)\,.$$