Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 3 pages.**

⧫ Problème 1 : fonctions hyperboliques

L'objet de ce problème est l'étude de plusieurs fonctions à valeurs réelles. **Une attention particulière sera apportée à la rédaction lors de l'évaluation des copies.**

– I –

Définition 1.

On appelle ***cosinus hyperbolique*** *la fonction définie par :*

$$\mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction ch. Est–elle dérivable ?
2. Étudier la parité de la fonction ch.
3. La fonction ch est–elle périodique ?
4. (a) Faire l'étude des variations de la fonction ch, en incluant d'éventuelles valeurs remarquables ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) Dessiner l'allure de la courbe de la fonction ch.
5. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \mathrm{ch}(x)}{2} .$$

– II –

Définition 2.

On appelle ***sinus hyperbolique*** *la fonction définie par :*

$$\mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction sh. Est–elle dérivable ?
2. Étudier la parité de la fonction sh.
3. La fonction sh est–elle périodique ?
4. (a) Faire l'étude des variations de la fonction sh, en incluant d'éventuelles valeurs remarquables ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) Dessiner l'allure de la courbe de la fonction sh.
5. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{2} .$$

6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que :
   (a) $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$;
   (b) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

7. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la quantité $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2$.

– III –

Définition 3.

On appelle ***tangente hyperbolique*** *la fonction définie par :*

$$\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

1. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction th. Est–elle dérivable ?
   (b) Justifier que, pour tout x dans l'ensemble de définition de th, on a
   $$\mathrm{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} .$$
2. Étudier la parité de la fonction th.
3. La fonction th est–elle périodique ?
4. (a) Faire l'étude des variations de la fonction th, en incluant d'éventuelles valeurs remarquables ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) Dessiner l'allure de la courbe de la fonction th.
5. Démontrer que
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)} .$$

⧫ Problème 2 : fonctions dérivables sur un segment

Dans tout ce problème, on pose :

$$\mathcal{D} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable sur } [0,1]\}$$

Une fonction f appartiendra donc à l'ensemble $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est dérivable sur le segment $[0,1]$.

– I –

1. Soient $f, g \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; dire (en justifiant) si les fonctions suivantes appartiennent à D : $f + \lambda g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$.
2. (a) Existe–t–il dans $\mathcal{D}$ une fonction f_0 telle que
   $$\forall f \in \mathcal{D},\ f + f_0 = f \ ?$$
   (b) Existe–t–il dans $\mathcal{D}$ une fonction f_1 telle que
   $$\forall f \in \mathcal{D},\ f \times f_1 = f \ ?$$
3. Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction strictement croissante.
   (a) Justifier que f admet un maximum et un minimum, que l'on notera respectivement M et m.
   (b) Soit $x \in [m, M]$. En faisant usage d'un résultat vu en terminale et s'abrégeant en trois lettres, démontrer que :
   $$\exists y \in [0,1],\ f(y) = x .$$

– II –

1. On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(2+x)$ et $g : x \mapsto x+1$, définies sur $[0,1]$.
   (a) Justifier que $f, g \in \mathcal{D}$.
   (b) Montrer que $f \leq g$.
   (c) Démontrer que $(fg)' \leq 2g$.
2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(2+x^4) \end{aligned}$$

   (a) Démontrer que $h \in \mathcal{D}$.
   (b) Dresser son tableau de variations.
   (c) La fonction h admet–elle des extrema ? Lesquels ?
3. Mêmes questions pour la fonction

$$\begin{aligned} \ell : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$