Ce devoir est à rendre pour le vendredi 27 novembre 2020.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Sous–groupes de $\mathbb{R}$

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   (a) Commençons par supposer que $a \notin G$.
      i. Démontrer qu'il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.
      ii. En déduire qu'il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $b - c < a$.
      iii. Conclure en utilisant la question précédente que $a \in G$ et que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   (b) On se fixe dans cette question un élément $g \in G$ et on pose $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
      i. Démontrer que $0 \leq g - na < a$.
      ii. En déduire que $g = na$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $(a > 0) \Rightarrow (G = a\mathbb{Z})$.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   (a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
      i. Démontrer qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.
      ii. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $(a = 0) \Rightarrow (G$ est dense dans $\mathbb{R})$.
4. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

   Proposition 1.
   Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$. Alors :
   — *soit il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;*
   — *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*