**Ce devoir est à rendre pour le mercredi 18 novembre 2020.**

*Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.*

## Théorème de Bolzano–Weierstrass

L'objectif de ce devoir est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1** (Bolzano–Weierstrass)**.**
*De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.*

On fixe une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que l'on suppose bornée par un réel $M \geq 0$.

1. Justifier que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [-M, M]$.
2. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ comme suit :
   — on pose $a_0 = -M$ et $b_0 = M$ ;
   — pour $n \geq 0$, on pose $A_n = \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$ et $B_n = \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$ ;
   * si $A_n$ contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_n$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ ;
   * sinon, on pose $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

   (a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 0$, le segment $I_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a l'inclusion $I_{n+1} \subset I_n$.

   (c) Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $b_n - a_n = \dfrac{M}{2^{n-1}}$.

   (d) En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.
3. On définit une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :
   — on pose $\varphi(0) = 0$ ;
   — pour $n \geq 0$ on pose $\varphi(n+1) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid (m > \varphi(n)) \wedge (u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}])\}$.

   (a) Justifier que le minimum ci–dessus existe bien et que $\varphi$ est strictement croissante.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\varphi(n)} \in I_n$.
4. Conclure la démonstration à l'aide du théorème des segments emboîtés appliqué à la suite de segments $(I_n)_n$.