Ce devoir est à rendre pour le lundi 2 novembre 2020.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Norme infinie d'une fonction bornée

Dans tout ce devoir, on fixe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et on pose :

$$\mathscr{B} = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M\} .$$

1. Démontrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathscr{B}$ si et seulement si elle est majorée et minorée.
2. Soit $f \in \mathscr{B}$; montrer que l'ensemble suivant admet une borne supérieure :

$$\mathrm{Abs}(f) = \{|f(x)| \ |x \in I\} .$$

Dans toute la suite, si $f \in \mathscr{B}$, on notera $\|f\|_\infty = \sup \mathrm{Abs}(f)$. Ce nombre est appelé *norme infinie* de la fonction f.

3. Soient $f, g \in \mathscr{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(\|f\|_\infty = 0) \Leftrightarrow$ (f est la fonction nulle).
   (b) Montrer que si $|f| \leq |g|$ alors $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.
   (c) i. Montrer que
   $$\forall x \in I, |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \, \|f\|_\infty .$$
   ii. Soit z un nombre réel tel que $z < |\lambda| \, \|f\|_\infty$. Démontrer que si $\lambda \neq 0$, il existe un réel $x \in I$ tel que
   $$\frac{z}{|\lambda|} < |f(x)| .$$
   iii. En déduire que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$.
   (d) i. Montrer que
   $$\forall x \in I, |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$
   ii. En déduire que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
4. À l'aide d'une étude de leurs variations, déterminer la norme infinie des fonctions suivantes définies sur $I =]0, 1[$:
   (a) $f : x \mapsto \ln(1 + x)$;
   (b) $g : x \mapsto \arctan(1 - x^2)$;
   (c) $h : x \mapsto \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x))$.