Ce devoir est à rendre pour le vendredi 2 octobre 2020.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Nombres de Fibonacci et damiers

On considère un damier de taille $2 \times n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on souhaite recouvrir par des pièces de taille 1×2 placées horizontalement ou verticalement. On note a_n le nombre de tels recouvrement possibles.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. On note ϕ et $\overline{\phi}$ les racines, classées par ordre décroissant, de l'équation $x^2 = x + 1$.
   (a) Déterminer ϕ et $\overline{\phi}$.
   (b) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}) .$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose
   $$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - a_n .$$
   Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.