

1 Définitions liminaires

1.1 Assertions

Définition 1 Une assertion est un énoncé, pouvant être vrai ou faux, mettant en relation des objets mathématiques.

Exemples :

1. " $2 + 2 = 12$ " est une assertion.
2. " De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite qui converge" également.

Convention 1 Une assertion est toujours vraie ou fausse, et jamais les deux à la fois.

Le lecteur averti aura remarqué que les termes "assertion vraie" et "assertion fausse" n'ont pas été définis. . .

Définition 2 Faire des mathématiques, c'est énoncer (et démontrer!) des assertions vraies, appelées *propositions*.

Dans la suite de ce cours, nous parlerons de *valeur de vérité* d'une assertion. Cette valeur est de 1 si l'assertion associée est vraie et de 0 sinon.

1.2 Autres définitions

Définition 3 Un théorème est une proposition importante.

Bien évidemment, la notion de théorème dépend du point de vue... Promis, c'est la dernière fois!

Définition 4 Un lemme est une proposition qui sert (dans le cadre où elle est énoncée) principalement à démontrer une autre assertion.

Définition 5 Un corollaire est une proposition qui découle immédiatement d'une autre assertion.

Définition 6 Un axiome est une assertion que l'on décide vraie.

Ces quelques bases établies, passons aux choses sérieuses...

2 Connecteurs

Les connecteurs jouent un rôle fondamental en logique puisqu'ils permettent de créer de nouvelles assertions à partir de assertions existantes (sans eux, les mathématiques seraient relativement bornées...).

2.1 Equivalence

Définition 7 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarque 1 Cette propriété est donc vraie si et seulement si P et Q ont mêmes valeurs de vérité. Si $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit que P et Q sont équivalentes.

Exemples :

1. $(1 = 0) \Leftrightarrow 2$ est impair.
2. Si $n \in \mathbb{Z}$, $(n \text{ est pair}) \Leftrightarrow (n + 1 \text{ est impair})$.

2.2 Le connecteur "OU"

Définition 8 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \vee Q$ (lire " P ou Q ") par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarque 2 On parle aussi de " OU inclusif", par opposition au " OU exclusif" que nous verrons un peu plus loin.

Proposition 1 Soient P , Q et R des assertions. Alors on a :

1. $P \vee P \Leftrightarrow P$
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3. $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

Preuve : Il s'agit uniquement de dresser les tables de vérités de chacun des membres de droite/gauche des équivalences. N'en démontrons qu'une, par exemple 2 :

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

La troisième et la quatrième colonne sont les mêmes, donc les deux assertions associées sont équivalentes.

Le troisième point de cette assertion donne un sens à la notation $P \vee Q \vee R$ qui désigne arbitrairement $P \vee (Q \vee R)$ ou $(P \vee Q) \vee R$.

2.3 Le connecteur "ET"

Définition 9 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \wedge Q$ (lire " P et Q ") par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proposition 2 Soient P , Q et R des assertions. Alors :

1. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
2. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
3. $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
4. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
5. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Preuve : En exercice. Il est conseillé à ce stade de la lecture de démontrer au moins l'une des assertions ci dessus.

2.4 Le connecteur "NON"

Définition 10 Soit P une assertion. On définit l'assertion \overline{P} (lire "Non P ") par la table de vérité suivante :

P	\overline{P}
0	1
1	0

Proposition 3 Soit P une assertion. Alors $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$.

Preuve : Trivial.

Le théorème suivant est dû à Augustus de Morgan :

Théorème 4 Soient P et Q deux assertions. Alors :

1. $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$
2. $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

Preuve :

1. Voici la table de vérité incluant toutes les étapes intermédiaires nécessaires à la démonstration. On déduit le résultat des colonnes 4 et 7.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2. $P \wedge Q \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} \Leftrightarrow \overline{\overline{P \vee Q}}$ d'après le 1.

Donc $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P \vee Q}} \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$. D'où le résultat.

Exercice 1 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \otimes Q = (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$ (ce nouveau connecteur est appelé "OU exclusif"). Dresser la table de vérité de \otimes .

Proposition 5 Soit P une assertion. Alors :

1. $P \wedge \overline{P}$ est fausse.
2. $P \vee \overline{P}$ est vraie.

Le 1 est appelé *Principe du tiers exclu*.

Preuve : Trivial.

2.5 Le connecteur "IMPLIQUE"

Définition 11 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Rightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Remarque 3 On notera que "faux" implique tout ce que l'on veut...

Exemples :

1. $(1 = 0) \Rightarrow$ (J'ai mangé une pomme hier à 21h)

2. (3 est pair) \Rightarrow (2 est pair)
3. Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , (f est dérivable) \Rightarrow (f est continue)

Proposition 6 Soient P , Q et R des assertions. Alors on a :

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$ [Transitivité]
2. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$
4. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$
5. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
6. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ [Contraposée]
7. $(\overline{P} \Rightarrow (Q \wedge \overline{Q})) \Rightarrow P$ [Démonstration par l'absurde]

Preuve : Une fois n'est pas coutume, la preuve se fait facilement par tables de vérité (par exemple).

3 Quantificateurs

3.1 Quantificateurs, phrases quantifiées

Définition 12 On définit les deux quantificateurs suivants :

1. le quantificateur universel, noté " \forall "
2. le quantificateur existentiel, noté " \exists "

On appelle phrase (ou expression) quantifiée toute propriété faisant intervenir des quantificateurs.

Signification des quantificateurs :

Soit P une assertion portant sur les éléments d'un ensemble \mathbb{E} . On définit alors de nouvelles assertions :

1. $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$, qui signifie que tous les éléments de \mathbb{E} vérifient la propriété P .
2. $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$, qui signifie qu'il existe un élément de \mathbb{E} qui vérifie la propriété P .

De plus, si un *unique* élément de \mathbb{E} vérifie P , on note : $\exists!x \in \mathbb{E}, P(x)$.

3.2 Échange de quantificateurs, dépendances

3.2.1 Échange de quantificateurs

Soit P une propriété dépendant de deux paramètres $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$.

Exemple :

Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on définit $P(x, y) = x|y$.

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in \mathbb{E}, \exists y \in \mathbb{F}, P(x, y)$
2. $\exists y \in \mathbb{F}, \exists x \in \mathbb{E}, P(x, y)$

Il est ainsi possible au sein d'une phrase quantifiée d'invertir deux quantificateurs existentiels sans en changer le sens. De la même façon, sont équivalents :

1. $\forall x \in \mathbb{E}, \forall y \in \mathbb{F}, P(x, y)$
2. $\forall y \in \mathbb{F}, \forall x \in \mathbb{E}, P(x, y)$

En revanche, il est **impossible** d'échanger la place d'un quantificateur universel et d'un quantificateur existentiel, comme nous le verrons ci-après. Les deux équivalences ci dessus donnent un sens aux notations " $\exists(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}, P(x, y)$ " et " $\forall(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}, P(x, y)$ ".

3.2.2 Dépendances

Le problème des dépendances dans les phrases quantifiées est très important en mathématiques. Par exemple, considérons les deux assertions suivantes, portant sur une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$
2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$

Ces deux assertions ne sont *absolument pas* équivalentes ! En effet, le (1) exprime la continuité de f (vous l'aviez bien sur remarqué...) alors que (2) exprime une autre notion, appelée *continuité uniforme*. Il est assez facile de démontrer (exercice !) que (2) \Rightarrow (1), mais la réciproque est fautive. Pourtant, la seule différence entre ces deux assertions est la place occupée par le " $\forall x \in \mathbb{R}$ "...

Le noeud du problème réside dans les *dépendances*. Dans l'assertion (1), le réel δ dépend de x : en effet, ce que signifie cette phrase quantifiée, c'est que si on fixe x dans \mathbb{R} , *alors* on va pouvoir trouver un δ tel que la propriété soit vérifiée. Tandis que (2) nous indique que l'on va pouvoir trouver δ tel que la propriété soit vraie pour tous x, y .

Conséquence :

Lorsque l'on manipule des phrases quantifiées, il faut apporter une attention toute particulière aux dépendances des paramètres entre eux afin d'éviter de monumentales erreurs d'interprétation. Une règle efficace en pratique est la suivante : les " \exists " dépendent des " \forall " qui les précèdent. Par exemple, dans $\exists z, \forall t \exists q, P(z, t, q)$ le paramètre q dépend de t alors que z et t ne dépendent d'aucun des autres paramètres (et ne sont pas dépendant entre eux).

3.3 Négation de phrases quantifiées

Il arrive dans la pratique assez souvent que l'on ait à nier des phrases quantifiées. Pour ce faire, on applique le résultat suivant :

Proposition 7 Soit P une variable dépendant d'un paramètre x . Alors :

1. $\overline{(\forall x, P(x))} \Leftrightarrow (\exists x, \overline{P(x)})$
2. $\overline{(\exists x, P(x))} \Leftrightarrow (\forall x, \overline{P(x)})$

Exemple :

$$\begin{aligned} & \overline{\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)} \\ & \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) \\ & \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) \\ & \vdots \\ & \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (|x - y| \leq \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| > \varepsilon) \end{aligned}$$

4 Méthodes de démonstration

Énoncer des assertions, c'est bien. Les démontrer c'est mieux. Les démontrer proprement, c'est encore mieux ! Voici une sélection de quelques-unes des méthodes les plus usitées dans tous les domaines des mathématiques...

4.1 Comment démontrer que $P \Rightarrow Q$?

Cette méthode de démonstration est absolument primordiale. On voit trop souvent des rédactions du genre " $P \Rightarrow R \Rightarrow S \Rightarrow Q \Rightarrow \text{ok}$ "... La première règle à respecter lorsque l'on veut démontrer une implication est de *ne pas utiliser le symbole " \Rightarrow "* ! En effet, comme l'on vient de le voir, celui-ci est un connecteur logique qui n'a absolument rien à voir avec le mot "donc".

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, le mieux est de suivre la méthode suivante :

1. Supposer que P est vraie.
2. Démontrer qu'alors Q est vraie.

Cette approche est en règle générale la seule valable...

Exemple "idiot" :

On veut démontrer " $(2 + 3 = 6) \Rightarrow (16 \text{ est un carré parfait})$ ".

1. Supposons que $2+3 = 6$.
2. $16 = 4 \times 4$ donc 16 est un carré parfait. D'où le résultat.

Cet exemple n'a aucun intérêt mathématique étant donné que l'on a pas fait usage de l'hypothèse (qui par ailleurs a la fâcheuse propriété d'être fausse...) ! Lorsque l'on arrive à démontrer que $P \Rightarrow Q$ sans avoir utilisé la véracité de P , c'est que l'on a fort vraisemblablement commis une erreur...

4.2 Comment démontrer que $P \Leftrightarrow Q$?

Pour démontrer une équivalence, il faut et il suffit de montrer deux implications. Ainsi, on procède en 2 temps :

1. On montre que $P \Rightarrow Q$.
2. On montre que $Q \Rightarrow P$.

Ce type de rédaction a l'immense avantage d'être bien moins "casse-gueule" que les suites (plus ou moins logiques, hélas...) de symboles " \Leftrightarrow ".

4.3 Comment démontrer que $P \vee Q$?

Sur le papier, ce genre de choses est excessivement simple. En pratique, il donne lieu à des raisonnements souvent assez brouillons. La meilleure méthode pour démontrer ce genre d'assertion est de procéder de la façon suivante : comme on a vu que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q)$, démontrer une assertion du type "soit P , soit Q " peut se faire en suivant ce plan :

1. Supposer que P est fausse.
2. Montrer qu'alors Q est vraie.

4.4 Comment démontrer que $P \wedge Q$?

Lorsque l'on doit démontrer " P et Q ", le mieux reste encore... de démontrer P et de démontrer Q ! Attention cependant à bien séparer les deux démonstrations, il ne s'agit pas de montrer $P \Rightarrow Q$...

4.5 Contraposée

Comme $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, il est possible de démontrer $P \Rightarrow Q$ en démontrant $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

4.6 Démonstration par l'absurde

On a vu que $(\bar{P} \Rightarrow (Q \wedge \bar{Q})) \Rightarrow P$. Ainsi, si on suppose "Non P " et que l'on aboutit à une contradiction, alors P est vraie. Il est recommandé de ne pas abuser de cette méthode.

4.7 Comment démontrer que $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$?

La procédure est la suivante :

1. On se donne $x \in \mathbb{E}$.
2. On montre $P(x)$.

L'erreur (gravissime !) serait ici de se donner un x "particulier" et de montrer $P(x)$...

4.8 Comment démontrer que $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$?

Certainement l'une des démonstrations les plus difficiles a priori... Les deux méthodes ci-après comptent parmi les seules efficaces (et correctes) :

1. Exhiber un élément x vérifiant P .
2. Reasonner par l'absurde en supposant qu'aucun élément de \mathbb{E} ne vérifie P .

4.9 Comment démontrer que $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$?

1. On commence par montrer que $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ (souvent l'étape la plus difficile).
2. On suppose qu'il existe x et \hat{x} dans \mathbb{E} vérifiant P .
3. On montre que $x = \hat{x}$.