1 Généralités

1.1 Notion d'Application

On appelle *application* tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$, où :
- E est un ensemble, appelé *ensemble de départ* de l'application.
- F est un ensemble, appelé *ensemble d'arrivée* de l'application.
- $\Gamma \subset E \times F$, telle que $\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma$. Γ est appelé *graphe* de f.
  ☞ On dit que y est l'image par f de x (noté "$f(x)$"), et que x est l'antécédent de y.

1.2 Composition des applications

Il convient ici de prendre quelques précautions... Soient E, F et G des ensembles. Soient f et g deux applications allant respectivement de E dans F et de G dans E.

Attention ! On ne compose pas dans le cas général !

On peut alors définir l'application «composée de f et g», notée "$f \circ g$" par :

$$\forall x \in G, (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

☞ Cette application part donc de G dans F !

Un petit diagramme pour mieux se rendre compte :

$$G \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F \rightsquigarrow G \xrightarrow{f \circ g} F$$

✘ La loi " $\circ$ " est associative mais n'est PAS commutative !

1.3 Restriction, prolongement

Soit $f = (E, F, \Gamma)$ une application. Soit P une partie de E.
On appelle *restriction* de f à P l'application $f_{|_P} = (P, F, \hat{\Gamma})$, où : $\hat{\Gamma} = \{(x, y) \in \Gamma, x \in P\}$

☞ En clair, cela signifie que $f_{|_P}$ possède le même mécanisme que f, mais que l'on a restreint son ensemble de définition à P, i.e on considère l'application que va de P dans F, et qui à x associe $f(x)$. Graphiquement parlant, cela revient à "ne considérer qu'une partie de la courbe".

À l'inverse, un *prolongement* de f est toute application $g : G \to F$ telle que $G \supset E$ et $g_{|_E} = f$. Il n'y a ici évidemment pas unicité.

2 Injections, surjections, bijections

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Alors :

(i) On dit que f est **injective** si et seulement si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f.

(ii) On dit que f est **surjective** si et seulement si tout élément de F admet *au moins* un antécédent par f.

(iii) On dit que f est **bijective** si et seulement si elle est surjective et injective.

Une caractérisation interessante de ces applications est la suivante :

(i) f est injective $\Leftrightarrow \exists g$ application de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

(ii) f est surjective $\Leftrightarrow \exists g$ application de F dans E telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(iii) f est bijective $\Leftrightarrow \exists g$ application de F dans E telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

✍Dans les cas des **bijections** uniquement, g est notéef^{-1}.