Polynômes (2)

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

– I –

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point et f, g deux fonctions polynomiales telles que $\forall x \in I,\ f(x)g(x) = 0$. Démontrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Ce résultat s'applique–t–il aux fonctions non polynomiales ?
2. Déterminer les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y & = 3 \\ x^2 + y^2 & = 5 \end{array} \right. .$$

3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P^2 + 1$.
   (a) On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
   (b) Que peut–on en déduire sur le polynôme P ?
4. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction associée est périodique.

– II –

1. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(3X) = P' + 5P''$.
2. Démontrer (sans utiliser de fonctions polynomiales) que pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$,

$$(AB)' = A'B + AB' .$$

3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 3$ et $P^{(n)}(1) = 0$ pour $n \geq 3$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^3$ divise le polynôme

$$P_n = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n .$$

– III –

1. Démontrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Quelle est la décomposition en produit d'irréductibles de $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?