Polynômes (1)

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

– I –

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Démontrer que $P - X$ divise $P^k - X^k$ pour tout $k \geq 1$.
   (b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
   (c) Conclure en démontrant que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$.
3. Soit $n \geq 2$ et soient $a, b \in \mathbb{C}$; on pose, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Déterminer le produit
$$\prod_{k=0}^{n-1} (a + b\omega_k) \ .$$
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ pour que les racines du polynôme $X^3 + pX + q$ aient le même module. *On pourra admettre (pour l'instant) que ce polynôme possède trois racines comptées avec multiplicité.*

– II –

1. Déterminer le pgcd des polynômes $X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $2X^3 + 1$.
2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
   (b) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\varphi + X\sin\varphi)^n$ par $X^2 + 1$.
3. On dit qu'un sous–groupe de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in I$, $PQ \in I$.
   (a) Démontrer que pour tout $A \in K[X]$, $A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) On fixe dans cette question un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ différent de $\{0\}$.
      i. Justifier l'existence de $r = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$.
      ii. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $U \in I$ de degré r.
      iii. Démontrer que $I = U\mathbb{K}[X]$.