Équations différentielles linéaires

– II –

2. Déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

> ➥ **Correction :**
> Pour déterminer une solution particulière, on remarque que $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$ et on trouve une solution particulière des équations
>
> $$\begin{cases} y'' + 4y = e^{ix} \\ y'' + 4y = e^{-ix} \end{cases}$$
>
> avant de conclure par principe de superposition, obtenant $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin(x)$.*L'équation homogène se résout immédiatement et admet pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{2ix} + \mu \mapsto e^{-2ix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (comment caractériser les solutions réelles ?).*
> *Pour déterminer une solution particulière, on remarque que $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$ et on trouve une solution particulière des équations*
>
> $$\begin{cases} y'' + 4y = e^{ix} \\ y'' + 4y = e^{-ix} \end{cases}$$
>
> *avant de conclure par principe de superposition, obtenant $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin(x)$.*

3. (a) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

> ➥ **Correction :**
> — *Commençons par prouver l'unicité : si $f = g + h = i + j$ avec g, i paires et h, j impaires on a $g - i = h - j$. Or $g - i$ est paire et $h - j$ est impaire, donc la seule possibilité est $g - i = h - j = 0$.*
> — *L'existence est immédiate une fois que l'on remarque que*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\textit{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\textit{impaire}} .$$

(b) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x$.

> ➥ **Correction :** *D'après la question précédente, il existe une unique fonction paire g et une unique fonction impaire h telles que $f = g + h$. Ainsi*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = g''(x) + h''(x) \ \text{ et } \ f(-x) = g(x) - h(x)$$
>
> *ce qui implique*
>
> $$x = \underbrace{g''(x) + g(x)}_{\textit{paire}} + \underbrace{h''(x) - h(x)}_{\textit{impaire}} .$$
>
> *Comme $x \mapsto x$ est impaire, l'unicité dans la décomposition précédente impose*
>
> $$\begin{cases} g'' + g = 0 \\ h'' - h = x \end{cases} .$$
>
> *En résolvant ces deux équations, on trouve que g est de la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et h de la forme $x \mapsto -x + c\,\mathrm{ch}(x) + d\,\mathrm{sh}(x)$ $(c, d \in \mathbb{R})$. Comme g (resp. h) est paire (resp. impaire) on a $b = c = 0$. Les fonctions f solutions du problèmes sont donc les $x \mapsto -x + a\cos(x) + d\,\mathrm{sh}(x)$, pour $a, d \in \mathbb{R}$.*