Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

– II –

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $D(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n et $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble de ces derniers.

(a) Calculer $D(n)$ pour n compris entre 1 et 17.

➥ **Correction :** *Immédiat.*

(b) Déterminer $D(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$.

➥ **Correction :** *Par définition de nombre premier, les seuls diviseurs de p^α sont $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$. Ainsi*

$$D(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k = \frac{1 - p^{\alpha+1}}{1-p} \ .$$

(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) &\to \mathrm{Div}(ab) \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2 \end{aligned}$$

est bijective. En déduire que $D(ab) = D(a)D(b)$.

➥ **Correction :**

— *Supposons que l'on ait (d_1, d_2) et (d_1', d_2') dans $\mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b)$ tels que $\pi(d_1, d_2) = \pi(d_1', d_2')$. Alors $d_1 d_2 = d_1' d_2'$ et comme d_1 est un diviseur de a il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = d_1 k$, ce qui entraîne $a d_2 = d_1' d_2' k$ donc d_2' divise d_2 par lemme de Gauss. De façon analogue, on démontrer que d_2 divise d_2' et donc (par positivité) $d_2 = d_2'$, ce qui implique $d_1 = d_1'$. L'application π est donc injective.*

— *La surjectivité est immédiate via la décomposition en produit de facteurs premiers.*

— *On a*

$$\begin{aligned} D(ab) &= \sum_{d \in \mathrm{Div}(ab)} d \\ &= \sum_{(d_1, d_2) \in \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b)} d_1 d_2 \\ &= \left(\sum_{d_1 \in \mathrm{Div}(a)} d_1 \right) \left(\sum_{d_1 \in \mathrm{Div}(b)} d_2 \right) \\ &= D(a)D(b) \ . \end{aligned}$$

(d) Donner une méthode permettant, connaissant un entier n et sa décomposition en produit de facteurs premiers, de calculer $D(n)$. En déduire $D(2017)$.

➥ **Correction :** *Il suffit de faire la synthèse des deux questions précédentes en écrivant n comme produit de facteurs premiers.*