Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

– I –

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$; démontrer que les entiers $20n^2 + 4n + 5$ et $10n^2 + 2n + 2$ sont premiers entre eux.
2. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :
   (a) $15x + 6y = 3$;
   (b) $42x + 28y = 14$;
   (c) $9x + 270y = 7$.
3. Pour $n \geq 2$, on appelle n–ième *nombre de Mersenne* l'entier $M_n = 2^n - 1$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, si M_n est premier alors n l'est.
   (b) Que dire de la réciproque ?
4. Déterminer le pgcd et une relation de Bézout associés aux entiers 155 et 94.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fraction rationnelle $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est–elle irréductible ?

– II –

1. Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux. Déterminer le pgcd de $a + b$ et ab.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $D(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n et $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble de ces derniers.
   (a) Calculer $D(n)$ pour n compris entre 1 et 17.
   (b) Déterminer $D(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Démontrer que l'application
   $$\begin{aligned} \pi : \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) &\to \mathrm{Div}(ab) \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2 \end{aligned}$$
   est bijective. En déduire que $D(ab) = D(a)D(b)$.
   (d) Donner une méthode permettant, connaissant un entier n et sa décomposition en produit de facteurs premiers, de calculer $D(n)$. En déduire $D(2017)$.
3. L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admet–elle des solutions rationnelles ?
4. Soit p un nombre premier.
   (a) Démontrer que pour tout $0 < k < p$, p divise le coefficient binomial $\dbinom{p}{k}$.
   (b) En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p$ $[p]$.