Groupes, anneaux et corps

– II –

2. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments *nilpotents* de $\mathbb{A}$ de la façon suivante :
$$\mathrm{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\, x^n = 0\} \,.$$

(b) $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est–il un sous–anneau de $\mathbb{A}$?

➥ **Correction :** *Non, sauf si $\mathbb{A}$ est l'anneau nul. En effet, dans ce cas $1 \notin \mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ et donc ce dernier ne peut être un sous–anneau de $\mathbb{A}$.*

3. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle *idéal* de $\mathbb{A}$ tout sous–groupe $(I, +)$ de $(\mathbb{A}, +)$ tel que
$$\forall a \in \mathbb{A},\, \forall x \in I,\, ax \in I \,.$$

(a) Démontrer que si I est un idéal contenant 1 alors $I = \mathbb{A}$. Quels sont les idéaux d'un corps ?

➥ **Correction :**
- *Si $1 \in I$, alors pour tout $a \in \mathbb{A}$, $a\dot{1} = a \in I$ et donc $I = \mathbb{A}$.*
- *Si I est un idéal non nul d'un corps $\mathbb{K}$, il contient un élément $x \in \mathbb{K}^*$. Comme x est inversible, on a que $x^{-1}x = 1 \in I$ par propriété d'idéal et donc $I = \mathbb{K}$. Les idéaux d'un corps sont donc $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.*

(b) Démontrer que si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{A}$ alors $I \cap J$ et $I + J$ le sont également.

➥ **Correction :**
- *Dans les deux cas, il est clair que ces ensembles sont des sous–groupes (vérifier la caractérisation, l'intersection a même été traitée plus tôt dans le TD). On rappelle que $I + J = \{x + y \,|\, x \in I,\, y \in J\}$.*
- *Si $x \in I \cap J$ et $a \in \mathbb{A}$ alors $ax \in I$ car $x \in I$ et $ax \in J$ car $x \in J$ donc $x \in I \cap J$.*
- *Si $x \in I + J$, alors il existe par définition $(i, j) \in I \times J$ tel que $x = i + j$. Ainsi, $ax = ai + aj$; $ai \in I$ (car $i \in I$) et $aj \in J$ (car $J \in J$) donc $x \in I + J$.*

4. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.

➥ **Correction :** *On va démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un sous–corps de $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ sont évidents ($1 = 1 + 0 \times \sqrt{d}$).*
- *Soient $x = a + b\sqrt{d}$ et $y = u + v\sqrt{d}$ deux éléments de$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Alors :*
$$x - y = (a - u) + (b - v)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$
et
$$xy = (au + dbv) + (bu + av)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \,.$$
- *Soit $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Pour trouver un inverse à x dans $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ on résout l'équation d'inconnue α, β suivante*
$$(a + b\sqrt{d})(\alpha + \beta\sqrt{d}) = 1 \,.$$
Si $b = 0$, la résolution est triviale ; dans le cas contraire, on trouve :
$$\begin{cases} a\alpha + db\beta = 1 \\ a\beta + \alpha b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{db^2 - a^2} \in \mathbb{Q} \\ \beta = \dfrac{b}{db^2 - a^2} \in \mathbb{Q} \end{cases} \,.$$
Ainsi x admet bien un inverse dans $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, ce qui conclut la preuve.

5. Soit $\mathbb{K}$ un corps ; démontrer que tout morphisme d'anneau de $\mathbb{K}$ dans lui–même est injectif.

➥ **Correction :** *Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un morphisme d'anneaux et soient $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $f(x - y) = 0$, ce qui implique que $x = y$ car pour tout $z \in \mathbb{K}^*$, $f(z)$ ne peut être nul. En effet, $f(z)f(z^{-1}) = f(zz^{-1}) = f(1) = 1$.*

Remarque : *il existe (en dehors du programme du MPSI) une caractérisation de l'injectivité des morphismes d'anneaux à l'aide du noyau, identique à celle vue en cours sur les groupes.*