Groupes, anneaux et corps

– I –

1. (a) Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.
   (b) Que dire du cas où $\forall g \in G,\ g^2 = g$?
2. Soient H_1 et H_2 deux sous–groupes d'un groupe G. Les ensembles $H_1 \cap H_2$ et $H_1 \cup H_2$ sont–ils des sous–groupes de G ?
3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui–même.
4. Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont–ils isomorphes ?
5. (a) Soient $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes. Démontrer que l'ensemble $G \times H$ muni de la loi de composition interne
$$\nabla : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 \star x_2, y_1 \diamond y_2)$$
   est un groupe, appelé *groupe produit* de G et H.
   (b) Démontrer que les groupes $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ sont isomorphes.
6. Soit E un ensemble ; on appelle *différence symétrique* de $A, B \in \mathcal{P}(E)$ la quantité
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$
   (a) Démontrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et tout $x \in E$ on a $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) \equiv \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)\ [2]$.
   (b) En déduire que Δ est une loi de composition interne associative sur $\mathcal{P}(E)$.
   (c) Démontrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
7. On pose $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \,|\, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Démontrer que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe. Est–il abélien ?

– II –

1. On appelle *anneau de Boole* tout anneau $\mathbb{A}$ tel que $\forall a \in \mathbb{A},\ a^2 = a$.
   (a) Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.
   (b) Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau de Boole. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A},\ a + a = 0$.
   (c) Soit E un ensemble ; démontrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
2. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments *nilpotents* de $\mathbb{A}$ de la façon suivante :
$$\mathrm{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0\}\,.$$
   (a) Démontrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est stable par produit et somme.
   (b) $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est–il un sous–anneau de $\mathbb{A}$?
3. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle *idéal* de $\mathbb{A}$ tout sous–groupe $(I, +)$ de $(\mathbb{A}, +)$ tel que
$$\forall a \in \mathbb{A},\ \forall x \in I,\ ax \in I\,.$$
   (a) Démontrer que si I est un idéal contenant 1 alors $I = \mathbb{A}$. Quels sont les idéaux d'un corps ?
   (b) Démontrer que si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{A}$ alors $I \cap J$ et $I + J$ le sont également.
4. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps ; démontrer que tout morphisme d'anneau de $\mathbb{K}$ dans lui–même est injectif.