

SUITES NUMÉRIQUES

– I –

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = 2 + (-1)^n$ est divergente.
2. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
 - (a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$
 - (b) $v_n = \frac{n^2 + 7n + 12}{n^3 + n^4}$
 - (c) $w_n = [e^n]$
 - (d) $x_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$
3. Soit u une suite convergente. Démontrer que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
4. Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?
5. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}$.
6. *Moyenne de Césaro.* Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

7. *Suite arithmético-géométrique.* Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Démontrer que u et v sont adjacentes.

– II –

1. Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\left\{1 - \frac{1}{x} \mid x > 0\right\}$.
2. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $-\infty$ et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.
3. Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ (on dit que a est *adhérent* à $I \setminus \{a\}$).