Nombres complexes

– II –

2. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire la valeur de la somme
   $$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} .$$

➥ **Correction :** *D'après la question (b) on a*

$$(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) .$$

Or, d'après la question (a), pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$1 + j^k + j^{2k} = \begin{cases} 3 \text{ si } k \equiv 0[3] \\ 1 + j + j^2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme $1 + j + j^2 = 0$ (pourquoi ?), on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}((1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) .$$