

NOMBRES COMPLEXES

– I –

1. (a) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z du plan tels que les points d'affixes 1 , z et z^2 soient alignés.
- (b) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z du plan tels que le triangle formé par les points d'affixes 1 , z et z^2 soit équilatéral.
2. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\left(\frac{1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)}{2 + 2i}\right)^{10}$.
3. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que

$$\frac{b}{a} \left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^* .$$

4. (a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z + \bar{z} = |z|$.
- (b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $|z + 1| = |z| + 1$.

– II –

1. Soient $a, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \cos(a + k\theta) .$$

2. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Calculer j^n et $(j^2)^n$.
 - (b) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité $(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$.
 - (c) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} .$$

– III –

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\sqrt{3} + i$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + z + 1$.
3. Soit $n \geq 1$ et soit ω une racine n -ième de l'unité. Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^n \omega^k .$$

4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
5. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - z^2 - 1 = 0$.