Trigonométrie(s)

– II –

3. (c) Exprimer θ en fonction de x.

> ➥ **Correction :** *Il suffit de remarquer que* $e^x = \tan(\theta/2 + \pi/4)$ *pour obtenir*
>
> $$\theta = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}\ .$$

4. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.

> ➥ **Correction :** *La fonction* $x \mapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme somme de composées de fonctions dérivables. Par contre, pour dériver ça, il faut mieux y aller mollo... Si vous n'avez pas confondu vitesse et précipitation, ça devrait donner :*
>
> $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{1}{1+\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad \textit{par dérivée d'une composée}\\ &= \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{1}{1+\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\\ &= \frac{1}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$
>
> *et*
>
> $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(e^x) &= \frac{e^x}{1+e^{2x}}\\ &= \frac{1}{e^x+e^{-x}}\ .\end{aligned}$$
>
> *donc notre fonction est dérivable et de dérivée nulle sur* $\mathbb{R}$.

(b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c\ .$$

Déterminer la valeur de c.

> ➥ **Correction :** *La fonction de la question précédente a sa dérivée nulle sur un intervalle donc est constante. On calcule sa valeur en zéro et on trouve*
>
> $$\arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{0}{2}\right)\right) - \arctan(e^0) = \arctan(1) - \arctan(0) = -\frac{\pi}{4}$$
>
> *donc* $c = -\dfrac{\pi}{4}$.