Trigonométrie(s)

– I –

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :
   (a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
   (b) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
   (c) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
   (d) $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.
3. Exprimer, pour $x \in [-1, 1]$, les quantités $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$.
4. (a) Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{aligned}$$

   est injective.
   (b) Démontrer que $f(\mathbb{R}) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
   (c) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} g :]-\pi, \pi[&\to \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \tan(\theta/2) \end{aligned}$$

   est surjective.
   (d) Déterminer une expression simple de la composée $f \circ g$.

– II –

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que :
   (a) $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$;
   (b) $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}}\,.$$

3. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; on pose $t = \tan(\theta/2)$ et $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
   (a) Démontrer que $x = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
   (b) En déduire une expression de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.
   (c) Exprimer θ en fonction de x.
4. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c\,.$$

   Déterminer la valeur de c.