Nombres réels

– III –

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

➥ **Correction :** *Posons* $d_x = x - \lfloor x \rfloor$ $d_y = y - \lfloor y \rfloor$ *et remarquons que l'on a :*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + d_x + d_y \ .$$

— ***Si*** $d_x, d_y \leq 1/2$ ***:*** *dans ce cas on a*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

et donc

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

par encadrement entre deux entiers successifs.

— ***Si*** d_x ***ou*** d_y ***est strictement supérieur à*** $1/2$ ***(mais pas les deux) :*** *on démontre de la même façon que*

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \ .$$

— ***Si*** $d_x, d_y > 1/2$ ***:*** *on montre par encadrement que*

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \ .$$

Dans tous les cas, l'inégalité annoncée est vérifiée (remplacer $\lfloor x+y \rfloor$ *par son expression).*