# Nombres réels

## – I –

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ ; démontrer que $\sqrt{|x-y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ ; montrer que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
4. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

## – II –

1. Soient $A, B$ deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $B \subset A$. Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :

$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A) .$$

2. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad x < y .$$

   Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$ ?

3. Soient $A, B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{x + y \,|\, (x, y) \in A \times B\} .$$

   Démontrer que $A+B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$ ; étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \;\middle|\; x, y \in [a, b] \right\} .$$

5. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. On pose

$$A = \{x \in [0, 1] \,|\, x \leq f(x)\} .$$

   (a) Démontrer que pour tout $x \in A$ on a également $f(x) \in A$.
   (b) Montrer que $A$ admet une borne supérieure $a$ et que $f(a) \geq a$.
   (c) En déduire que $f(a) = a$.

6. Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose

$$B = \{|x - y| \,|\, x, y \in A\} .$$

   (a) Démontrer que $B$ est non vide et bornée.
   (b) Montrer que $B$ admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
   (c) Démontrer que $B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

## – III –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ ; étudier la quantité $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
2. On considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x - \lfloor x \rfloor| . \end{aligned}$$

   (a) Tracer l'allure du graphe de $f$ sur $[-3, 3]$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$.
   (d) Démontrer que $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ ; démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.