## Applications, relations

### – I –

8. Démontrer la proposition sur les indicatrices du cours.

➥ **Correction :** *Soit $E$ un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*

*(a) Soit $x \in E$ ; alors*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1) \wedge (\mathbb{1}_B(x) = 1)\,. \end{aligned}$$

*De fait, on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.*

*(b) De la même façon, on vérifie que, si $x \in E$ :*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1) \vee (\mathbb{1}_B(x) = 1)\,. \end{aligned}$$

*Ici, il faut prendre garde au cas où $x \in A \cap B$, qui impose la formule suivante :*

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B\,.$$

*(c) Soit $x \in E$ ; alors*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{B/A}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in B/A \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1) \wedge (\mathbb{1}_B(x) = 0)\,. \end{aligned}$$

*De fait, on a bien $\mathbb{1}_{B/A} = \mathbb{1}_B(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$.*

*(d) En appliquant la question précédente à $B = E$, on trouve $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.*