Applications, relations

– I –

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   (a) $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} \psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto |n| \end{array}$ (d) $\begin{array}{l} h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto x+1 \end{array}$
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction suivante ; est–elle injective, surjective, bijective ?
$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$
3. Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.
4. Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$; on considère l'application
$$\begin{array}{l} \eta : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto (X \cup A, X \cup B) . \end{array}$$
   Démontrer que η est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
5. Soient E, F deux ensembles et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On fixe une application $f : E \to F$.
   (a) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
   (b) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$.
   (c) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
   (d) Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
6. Soient f, g deux applications telles que $f \circ g$ soit bijective. Que dire de f et g ? Réciproquement ?
7. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) \supset A$.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
8. Démontrer la proposition sur les indicatrices du cours.

– II –

1. Montrer que la relation "divise" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *circulaire* si :
$$\forall x, y, z \in E, \quad ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow (z\mathcal{R}x) .$$
   Montrer que toute relation d'équivalence est circulaire.
3. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation reflexive et transitive. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur E comme suit :
$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{S}y) \Leftrightarrow ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) .$$
   Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
4. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E de la façon suivante :
$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y)) .$$
   Montrer que que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
5. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\cos(x) = \cos(y)) .$$
   (a) Justifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Quelle est la classe de 0 ? De $\frac{\pi}{2}$? De π ?
   (c) Décrire la classe de tout nombre réel.