Entiers naturels, récurrence

– I –

3. Soit $P(n)$ la propriété "l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7".
   (a) Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

   ➥ **Correction :** *Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $P(n)$ soit vérifiée. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $8^n + 1 = 7k$ et donc $8(8^n + 1) = 8(7k)$. Il ne reste plus alors qu'à se souvenir que $8 = 7 + 1$ et à réarranger pour obtenir $8^{n+1} + 1 = 7(8k - 1)$ et donc $P(n+1)$.*

   (b) Que peut–on en déduire ?

   ➥ **Correction :** *On en déduit qu'une récurrence non initialisée ne vaut rien ; ici on a un exemple de prédicat héréditaire mais faux.*

– II –

5. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \ .$$

➥ **Correction :** *Celui-ci est un tantinet moche. On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \ .$$

Ceci étant, on sait également que

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)$$

ce qui nous donne in fine l'égalité

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \ .$$

On obtient alors le résultat en identifiant les termes de degré n dans ces deux sommes.

7. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$; calculer

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} \ .$$

➥ **Correction :** *Soit $k \in [\![0, p]\!]$; alors :*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-k-(p-k))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{k!}\,\frac{1}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{1}{(n-p)!}\,\frac{n!}{k!(p-k)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\,\frac{p!}{k!(p-k)!} \\
&= \binom{n}{p}\binom{p}{k}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{p}\binom{p}{k} \\
&= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} \\
&= \binom{n}{p}(1-1)^p\ .
\end{aligned}$$

La somme demandée est donc égale à 1 *si* $p = 0$ *et à* 0 *sinon.*