# Entiers naturels, récurrence

## – I –

1. Calculer les dérivées successives de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Pour tout $n \geq 0$, comparer les quantités $(n+1)!$ et $2^n$.
3. Soit $P(n)$ la propriété "l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7".
   (a) Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
   (b) Que peut–on en déduire ?
4. On considère la suite définie par récurrence comme suit :
$$\left\{ \begin{array}{rl} u_0 & = 0 \\ u_1 & = 1 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} & = u_{n+1} + 3u_n \end{array} \right. .$$
   (a) Déterminer les racines $\psi$ et $\overline{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.
   (b) Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\psi^n - \overline{\psi}^n}{\psi - \overline{\psi}} .$$

## – II –

1. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$ :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} .$$
2. Calculer le produit suivant, pour $n \geq 2$ :
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) .$$
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.
4. Soit $n \geq 0$ ; en faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} .$$
5. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} .$$
6. En s'inspirant des exercices précédents, calculer, pour $n \geq 0$ :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} .$$
7. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$ ; calculer
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} .$$