Révisions et compléments d'analyse

– I –

Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux) et énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, existence d'une réciproque).

1. $f : x \mapsto x^{1/3}$;
2. $g : x \mapsto x^7$;
3. $h : x \mapsto e^{2x^3+7}$;
4. $i : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\ln(x)$;
5. $j : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)$;
6. $k : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$;
7. $\ell : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

– II –

1. Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :
   (a) pour $a > 0$, $x \mapsto x^a$;
   (b) pour $x \in]0,1[$, $a \mapsto x^a$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
3. Établir, pour tout $x \geq 0$, l'encadrement
$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x\ .$$
4. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$
$$\ln(1+x) \leq x\ .$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\ .$$
5. Montrer que pour tous $a, b > 0$
$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}\ .$$

– III –

Soit $\lambda > 0$; pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{\lambda x}$.

1. Étudier les variations (limites comprises) de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$; montrer qu'alors on a
$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \qquad (1)$$
3. Réciproquement, montrer que toutes les solutions x de (1) satisfont la relation $f(x) = x$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant par exemple que $f(x) > x$.*
4. Résoudre l'équation (1). *Indication : étudier une fonction pertinente.*