Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

Dans tout ce devoir, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. L'objectif de ce ce problème est l'étude d'une classe de fonctions particulière, définie ci–ensuite.

Définition 1.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite ***uniformément continue*** *(ou u.c.) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I, \quad (|x-y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)\ .$$

– I –

1. Écrire la négation de la définition 1.
2. Démontrer que tout fonction u.c. sur I est également continue sur cet intervalle.
3. On fixe dans cette question $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \quad .$$

   (a) Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(2x+\delta)\delta > 1$.
   (b) Posons $y = x + \delta$. Démontrer que $|f(x) - f(y)| > 1$.
   (c) Toute fonction continue sur un intervalle est–elle également u.c. ?

– II –

Commençons cette partie par rappeler la définition suivante.

Définition 2.

*Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite k–**lipschitzienne** si :*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\ .$$

1. Démontrer que tout fonction lipschitzienne sur I est continue sur cet intervalle.
2. Fixons à présent un réel $k \geq 0$, une fonction k–lipschitzienne $f : I \to \mathbb{R}$ et un nombre $\varepsilon > 0$.
   (a) Soit $\delta > 0$. Démontrer que pour tous $x, y \in I$ tels que $x - y \in [-\delta, \delta]$ la quantité $f(x) - f(y)$ est bornée indépendamment de x et y.
   (b) En déduire que toute fonction lipschitzienne sur I est u.c. sur cet intervalle.
3. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \quad .$$

   (a) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.
   (b) En déduire que g est u.c. sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) i. Justifier qu'il existe $a > 0$ tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{a}} \leq 1$.
      ii. Démontrer que pour tous $x, y \in [a, +\infty[$ on a l'inégalité :

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|\ .$$

   (d) La fonction g est–elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$?

– III –

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant, du au mathématicien Eduard Heine (1821—1881).

Théorème 1 (Heine)**.**
Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Pour ce faire, fixons deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et procédons par l'absurde en supposant que f n'est pas u.c. sur $[a, b]$.

1. Démontrer qu'il existe dans ce cas un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ d'éléments de $[a, b]$ tels que
$$\forall n \geq 1, \qquad \left(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}\right) \wedge (|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon) .$$
2. (a) Montrer qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un nombre réel ℓ.
   (b) Justifier que $\ell \in [a, b]$.
   (c) Démontrer que la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ converge également vers ℓ.
   (d) Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, de la quantité $|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})|$.
3. Conclure.

– IV –

On fixe dans cette partie deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ non vides non réduits à un point.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de la bijection.
2. Soit $f : I \to J$ une fonction bijective u.c.
   (a) Supposons que I soit un segment. Démontrer qu'alors J en est également un et que la bijection réciproque f^{-1} de f est u.c. sur J.
   (b) Ce dernier résultat reste–t–il vérifié dans le cas où I n'est pas un segment ?