Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

♦ Problème 1 : sous–groupes de $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$

Contrairement aux apparences, aucune connaissance sur les groupes n'est requise pour aborder ce problème. ✌

Dans toute la suite, la notation $\mathbb{A}$ désignera un ensemble égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On dira qu'un ensemble G est un **sous–groupe** de $\mathbb{A}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(SG1) $G \subset \mathbb{A}$;

(SG2) $0 \in G$;

(SG3) $\forall x, y \in G,\ x - y \in G$;

On dira également qu'un sous groupe G de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $G \cap]x, y[\neq \emptyset$.

– I –

1. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}$.
2. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.
3. Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Démontrer que dans ce cas $G_1 \cap G_2$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
4. (a) Soit $a \in \mathbb{A}$. Démontrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
   (b) Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Que dire de $G_1 \cup G_2$?
5. Soit G un sous–groupe de $\mathbb{A}$ et soit $g \in G$. Démontrer qu'alors $g\mathbb{Z} \subset G$.

– II –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{Z}$ différent de $\{0\}$.

1. Démontrer que l'ensemble $G \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, que l'on noteras n_0.
2. (a) Soit $n \in G$; justifier qu'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = qn_0 + r$ et $0 \leq r < n_0$.
   (b) En déduire que $G \subset n_0\mathbb{Z}$.
3. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

   Proposition 1.
   Soit G un sous–groupe de $\mathbb{Z}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G = n_0\mathbb{Z}$.

– III –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   (a) Commençons par supposer que $a \notin G$.
      i. Démontrer qu'il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.
      ii. En déduire qu'il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $b - c < a$.
      iii. Conclure en utilisant la question précédente que $a \in G$ et que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   (b) On se fixe dans cette question un élément $g \in G$ et on pose $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
      i. Démontrer que $0 \leq g - na < a$.
      ii. En déduire que $g = na$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $(a > 0) \Rightarrow (G = a\mathbb{Z})$.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.

(a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

i. Démontrer qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.

ii. Posons $n = \left\lfloor \dfrac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.

(b) Déduire de ce qui précède que $(a = 0) \Rightarrow (G$ est dense dans $\mathbb{R})$.

4. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

Proposition 2.
Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$. Alors :
— *soit il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;*
— *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*

♦ Problème 2 : homographies

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $(c \neq 0) \vee (d \neq 0)$; on considère dans ce problème l'application suivante, définie sur un sous–ensemble de $\mathbb{C}$:

$$\varphi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad .$$

– I –

1. Déterminer l'ensemble de définition de φ, *i.e* l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels l'expression $\varphi(z)$ est bien définie.
2. Démontrer que si $ad - bc = 0$, la fonction φ est constante.
3. On suppose désormais que $ad - bc \neq 0$.

(a) Justifier que si $c = 0$, la fonction φ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui–même et une similitude directe.

(b) Montrer que si $a = 0$, la fonction φ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C}^*$.

(c) Démontrer que si $ac \neq 0$, la fonction φ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ et que sa réciproque est de la forme

$$\varphi^{-1} : z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ vérifiant $\alpha\delta - \beta\gamma = ad - bc$.

– II –

Dans toute cette partie, on suppose que $ad - bc \neq 0$ et que $c \neq 0$. On prolonge l'application φ à l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ est un symbole sans signification particulière, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \begin{cases} \infty & \textit{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \textit{si } z = \infty \\ \frac{az+b}{cz+d} & \textit{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad .$$

1. Démontrer que φ est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans lui–même.
2. Soient u, v, w trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts. Démontrer qu'il existe un unique quadruplet a, b, c, d tel que $\varphi(u) = 0$, $\varphi(v) = 1$ et $\varphi(w) = \infty$.