Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 3 pages.**

L'objectif de ce problème est l'étude de trois classes d'ensembles. Dans toute la suite, un ensemble non vide $E \subset \mathbb{C}$ sera dit

- ◇ de **classe 1** si il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : [\![1, n]\!] \to E$;
- ◇ de **classe 2** si il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$;
- ◇ de **classe 3** si il n'est ni de classe 1, ni de classe 2.

☞ *Par exemple, l'ensemble* $E = \{\pi, 3, \sqrt{2}, 1 + i\}$ *est de classe 1 car l'application suivante est bijective.*

$$\begin{aligned} f : [\![1, 4]\!] &\to E \\ 1 &\mapsto \pi \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto \sqrt{2} \\ 4 &\mapsto 1 + i \end{aligned}$$

– I –

1. Justifier (rapidement) que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est de classe 1 et que $\mathbb{N}$ est de classe 2.
2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble $E = \{a_1, \dots a_n\}$ est de classe 1.
   (b) Réciproquement, démontrer que si E est de classe 1, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $E = \{a_1, \dots a_n\}$.
   (c) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est–il de classe 1 ?
3. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ de la façon suivante : si $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, on notera $A \,\mathcal{R}\, B$ lorsqu'il existe une bijection $f : A \to B$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que si $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ sont tels que A est de classe 1 ou 2 et $A \,\mathcal{R}\, B$ alors B est de la même classe que A.
   (c) Exprimer la classe 1 et 2 en termes de classes d'équivalences pour la relation $\mathcal{R}$.
   (d) En déduire qu'un ensemble ne peut être simultanément de classe 1 et de classe 2.

– II –

1. (a) Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

   est bijective. Déterminer (en justifiant) la classe de $\mathbb{N}^*$.
   (b) En s'inspirant de la question précédente, démontrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![n_0, +\infty[\![$ des entiers supérieurs ou égaux à n_0 est de classe 2.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{Z}_-$ des entiers négatifs est de classe 2.
3. En faisant usage de l'application suivante, démontrer que $\mathbb{Z}$ est de classe 2.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

– III –

On considère dans cette partie l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (n,m) &\mapsto m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} \ . \end{aligned}$$

1. L'objectif de cette question est de montrer la surjectivité de ψ. Pour ce faire, fixons $p \in \mathbb{N}$ et cherchons à construire un couple $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\psi(n,m) = p$.
   (a) Expliquer rapidement, à l'aide d'une définition du cours, pourquoi trouver un tel couple (n,m) permettrait de prouver la surjectivité de ψ.
   (b) Justifier que l'équation (d'inconnue X) $X^2 + X - 2p$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}_+$.
   (c) Posons $k = \lfloor x_0 \rfloor$. Montrer qu'on a alors l'encadrement
   $$\frac{k(k+1)}{2} \leq p < \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ .$$
   (d) En déduire que les quantités $m = p - \dfrac{k(k+1)}{2}$ et $n = k - m$ sont des éléments de $\mathbb{N}$.
   (e) Démontrer, en donnant sa réciproque, que ψ est bijective. Que peut–on en déduire sur la classe de $\mathbb{N}^2$?
2. (a) Soient E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \to G$, $g : F \to H$ deux bijections. Démontrer que l'application
   $$\begin{aligned} h : E \times F &\to G \times H \\ (x,y) &\mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$
   est une bijection.
   (b) En déduire à l'aide de la partie II qu'il existe une bijection $\nu : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer, à l'aide d'un résultat de la partie I, que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est donc de classe 2.
3. Dans cette question, on fixe une bijection $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\eta(n) = (a_n, b_n)$ l'image de l'entier n par cette application. On procède ensuite selon l'algorithme suivant :
   — on pose $q_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$;
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, on détermine $k_n = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall i \in [\![0,n]\!],\ \dfrac{a_k}{b_k} \neq q_i \right\}$ et on pose
   $$q_{n+1} = \frac{a_{k_n}}{b_{k_n}} \ .$$
   (a) Justifier que k_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n < k_{n+1}$.
   (b) Démontrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on a l'implication $(q_n = q_m) \Rightarrow (n = m)$. *Indication : on pourra commencer par démontrer que $(q_n = q_m) \Rightarrow (k_n = k_m)$.*
   (c) Soit $x \in \mathbb{Q}$; on rappelle que l'on peut alors écrire $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
      i. Justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(p,q) = (a_n, b_n)$.
      ii. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = q_{n_0}$.
   (d) Faire la synthèse des questions précédentes et démontrer que $\mathbb{Q}$ est de classe 2 en utilisant l'application
   $$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto q_n \ . \end{aligned}$$

– IV –

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une bijection $\iota : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \iota(\{n\})$. Démontrer que l'application
   $$\begin{aligned} \hat{\iota} : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$
   est bijective.
   (b) Soit $a = \hat{\iota}^{-1} \circ \iota(\emptyset)$. Justifier que $a \in \mathbb{N}$ et démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \neq a$.
   (c) Que peut–on conclure ?
2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est de classe 3.

Un peu de culture...

- ◇ *Les ensembles de classe 1 ont, comme nous l'avons démontré, un nombre fini d'éléments. On les appelle (surprise !)* ***ensembles finis****.*
- ◇ *Les ensembles de classe 2 sont appelés* ***ensembles dénombrables****. Il s'agit de ceux ayant "autant d'éléments" que $\mathbb{N}$. Ce nombre d'éléments est le "plus petit" des infinis, et est noté $\aleph_0$. Notons que bien que dense dans $\mathbb{R}$ (qui est de classe 3), $\mathbb{Q}$ est de classe 2.*
- ◇ *Les ensembles de classe 3 sont appelés* ***ensembles indénombrables****. Ils ont "strictement plus d'éléments" que $\mathbb{N}$. Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ sont de classe 3.*