Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur.

– I –

Dans toute cette partie, on fixe deux nombres réels a et b tels que $a \leq b$. On pose :

$$\mathcal{D} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable sur } [a,b]\}$$

1. Soient $f, g \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; dire (en justifiant) si les fonctions suivantes appartiennent à D : $f + \lambda g,\ f \times g,\ \dfrac{f}{g}$.
2. (a) Existe–t–il dans $\mathcal{D}$ une fonction f_0 telle que
$$\forall f \in \mathcal{D},\ f + f_0 = f\ ?$$
   (b) Existe–t–il dans $\mathcal{D}$ une fonction f_1 telle que
$$\forall f \in \mathcal{D},\ f \times f_1 = f\ ?$$
3. (a) Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction strictement croissante.
   i. Justifier que f admet un maximum et un minimum, que l'on notera respectivement M et m.
   ii. Soit $x \in [m, M]$. En faisant usage d'un résultat vu en terminale et s'abréviant en trois lettres, démontrer que :
$$\exists y \in [a,b],\ f(y) = x\ .$$
   (b) Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction strictement décroissante.
   i. Justifier que f admet un maximum et un minimum, que l'on notera respectivement M et m.
   ii. Soit $x \in [m, M]$. Démontrer que :
$$\exists y \in [a,b],\ f(y) = x\ .$$
   (c) Que dire du cas où f est une fonction constante ?

– II –

Dans toute cette partie, on se place sur le segment $[0,1]$.

1. On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(2+x)$ et $g : x \mapsto x+1$, définies sur $[0,1]$.
   (a) Justifier que $f, g \in \mathcal{D}$.
   (b) Montrer que $f \leq g$.
   (c) En déduire que $(fg)' \leq 2g$.
2. On considère la fonction
$$\begin{aligned} h : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(2+x^4) \end{aligned}$$
   (a) Démontrer que $h \in \mathcal{D}$.
   (b) Dresser son tableau de variations.
   (c) La fonction h admet–elle des extrema ? Lesquels ?
3. Mêmes questions pour la fonction
$$\begin{aligned} \ell : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

– III –

Définition 1. *On appelle* ***segment*** *tout intervalle fermé de la forme* $[a, b]$*, avec* $a, b \in \mathbb{R}$*. On rappelle que l'on a alors*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \ .$$

1. (a) Donner un exemple de segment ainsi qu'un exemple de partie de $\mathbb{R}$ n'étant pas un segment.
   (b) Exprimer en français l'égalité $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$.
   (c) Que se passe–t–il si $a > b$?
2. (a) La réunion de deux segments est–elle un segment ? Même question pour l'intersection.
   (b) Soit $S = [a, b]$ un segment ; l'ensemble $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ est–il un segment ?
   (c) L'ensemble $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ est–il un segment ?
3. Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$ si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in E \ .$$

   (a) Écrire la négation de la propriété $(\mathcal{P}_1)$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Montrer qu'alors

$$\forall \lambda \in [0, 1],\ x \leq \lambda x + (1 - \lambda) y \leq y \ .$$

   (c) En déduire que tout segment vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$.
   (d) Tout ensemble vérifiant la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est–il un segment ?
4. Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_2)$ si :

$$\exists m, M \in E,\ \forall x \in E,\ m \leq x \leq M \ .$$

   (a) Écrire la négation de la propriété $(\mathcal{P}_2)$.
   (b) Donner un exemple d'ensemble vérifiant la propriété $(\mathcal{P}_2)$ ainsi qu'un exemple d'ensemble ne la vérifiant pas.
   (c) Montrer que tout segment vérifie la propriété $(\mathcal{P}_2)$.
   (d) Montrer que si E vérifie la propriété $(\mathcal{P}_2)$ pour deux réels m et M donnés alors $E \subset [m, M]$.
5. Faire la synthèse de cette partie en démontrant la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit E un ensemble. Alors :*

$$E \text{ vérifie } (\mathcal{P}_1) \wedge (\mathcal{P}_2) \quad \Leftrightarrow \quad E \text{ est un segment.}$$

– IV –

Définition 2. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(*$a \leq b$*) ; on appelle* ***image*** *de f l'ensemble*

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in [a, b], f(x) = y\} \ .$$

1. Décrire la notion d'image d'une fonction par une phrase en français.
2. À l'aide de leurs tableaux de variations, décrire les images des 4 fonctions de la partie II.
3. Faire la synthèse des parties I, III et IV en démontrant la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction strictement monotone ou constante ; alors l'image de f est un segment.*