Ce devoir est à rendre pour le mercredi 17 janvier 2018.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

On dit qu'un sous–groupe de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in I$, $PQ \in I$.

1. Démontrer que pour tout $A \in K[X]$, $A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
2. On fixe dans cette question un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ différent de $\{0\}$.
   (a) Justifier l'existence de $r = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $U \in I$ de degré r.
   (c) Démontrer que $I = U\mathbb{K}[X]$.