

Ce devoir est à rendre pour le mercredi 13 décembre 2017.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} . On dira qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* si :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Donner trois exemples distincts de fonctions lipschitziennes (en justifiant).
2. Démontrer que si f est lipschitzienne et dérivable, alors sa dérivée f' est bornée.
3. (a) Démontrer, à l'aide d'une caractérisation séquentielle, que toute fonction lipschitzienne est continue.
(b) Que dire de la réciproque ?
4. Soit f une fonction lipschitzienne. Démontrer que la quantité

$$K(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$$

est bien définie.

5. Soient f et g deux fonctions lipschitziennes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que $f + \lambda g$ est lipschitzienne et que $K(f + \lambda g) \leq K(f) + |\lambda|K(g)$.